

Lehrbuch
der
elementaren Mathematik

von
Victor Schlegel,
Oberlehrer am Gymnasium in Waren.

Vierter Teil. (Zusatz)
Stereometrie
und
sphärische Trigonometrie.

Mit 62 Figuren in Holzschnitt und 4 lithogr. Tafeln.

Wolfenbüttel.
Druck und Verlag von Julius Zwissler.
1880.

Bitte die Rückseiten des Umschlags zu beachten.

Vorliegendes Buch bildet den IV. (Schluss-)Teil des

Lehrbuches der elementaren Mathematik

von

Victor Schlegel,

Oberlehrer am Gymnasium in Waren,

von welchem

1878 Teil I **Arithmetik und Combinatorik**, 12 Bogen 8°
Preis *M.* 2,40.

1879 » II **Geometrie**, mit 102 Figuren im Text, 14 Bogen 8°
Preis *M.* 2,80.

1880 » III **Trigonometrie**, mit einer 4stelligen Logarithmentafel und 12 Figuren im Text, 8 Bog. 8°
Preis *M.* 1,50.

und ausserdem die

Logarithmentafel apart auf Carton gedruckt und gebunden zum Preise von *M.* 0,60

erschienen ist.

Die Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (Leipzig, Teubner) äussert sich Bd. XI Bog. 15 folgendermassen über das Werk:

„Referent ist im Allgemeinen kein Freund neu erscheinender Lehrbücher der Elementarmathematik, deren seiner Ueberzeugung nach viel zu viele gedruckt werden, und aus diesem Grunde beschäftigt er sich auch nicht gern mit der Durchsicht und Besprechung solcher Werke. Ist doch das Beste, was man darüber sagen kann, in vielen Fällen das, dass sich eben nichts Besonderes darüber sagen lässt, dass gerade kein Grund zum Tadeln vorliegt. Der weise Erlass des rheinischen Provinzialschulcollegiums, welchen seiner Zeit auch diese Zeitschrift (VII, 325) mit gutem Grunde abdruckte, setzt innerhalb seines Bereiches der Lehrbücher-Manie einen Damm; auch werden darin mit Bedacht die Gründe für eine anscheinend so anormale Verfügung angegeben. Diese Gründe etwas erweiternd, scheuen wir uns nicht, den Satz auszusprechen, dass nur zwei Kategorien von Lehrern zu der in Rede stehenden didaktischen Thä-

Lehrbuch
der
elementaren Mathematik

von
Victor Schlegel,
Oberlehrer am Gymnasium in Waren.

~~~~~  
**Vierter Teil.**  
Stereometrie  
und  
sphärische Trigonometrie.

---

Mit 62 Figuren in Holzschnitt und 4 lithogr. Tafeln.

---

**Wolfenbüttel.**  
Druck und Verlag von Julius Zwissler.  
1880.







## V o r r e d e.

Bei der Bearbeitung des vorliegenden letzten Bandes meines Lehrbuchs der elementaren Mathematik ist es mein besonderes Bestreben gewesen, die mannigfachen Beziehungen zwischen ebenen und räumlichen Gebilden möglichst deutlich hervortreten zu lassen, und namentlich zu zeigen, wie die in der ebenen Geometrie enthaltenen Keime in der Stereometrie zur Entfaltung und Ausbildung gelangen, und wie andererseits die Gebilde und Beziehungen in der Ebene als specielle Fälle solcher im Raume erscheinen. Dieser Zweck bedingte eine Darstellungsweise, welche sich möglichst genau an die im zweiten (und dritten) Bande befolgte anschliesst, nötigte mich aber auch zu vielfachen Abweichungen von der gewohnten Form der Darstellung, Abweichungen, welche, wie ich hoffe, eine bessere Anordnung des Stoffes herbeigeführt haben. Bedenkt man, wie grundverschieden in den meisten Lehrbüchern die Darstellungsweise der Stereometrie von derjenigen der Geometrie ist, so dürfte schon der Umstand, dass es gelang, die im zweiten Bande befolgte systematische Anordnung des Stoffes auch im vierten Bande konsequent durchzuführen, für diese Anordnung sprechen. — Der Begriff der Bewegung ist natürlich auch diesmal oberstes Prinzip. Ein die Stereometrie der ruhenden Gebilde, d. h. die Theorie der Verwandtschaften im Raume, behandelnder Abschnitt musste wegbleiben, um den Umfang des Buches nicht über gewohnte Grenzen auszudehnen. Dagegen erschien es der Gleichmässigkeit wegen erforderlich, manche sonst in den Schulbüchern sehr stiefmütterlich behandelte Partien, z. B. die Lehre vom Tetraeder und von den regelmässigen Polyedern, ausführlicher zu behandeln. — Ueber sonstige Eigentümlichkeiten der vorliegenden Bearbeitung habe ich noch folgendes zu bemerken. Als wichtigstes Raumelement erscheint die Ebene, während die Gerade nur in Verbindung mit der Ebene betrachtet wird. Die krummen Flächen sind von den durch sie begrenzten Körpern streng getrennt. In Nr. 16 ist der Versuch gemacht, die komplizierten Beweise des Fundamentalsatzes der Stereometrie durch einen einfacheren zu ersetzen, und für Satz 219, welcher die Zerlegung des dreiseitigen Prismas in drei Tetraeder behandelt, ist der gewöhnliche Beweis durch einen, wie es scheint, weniger bekannten, aber sehr viel eleganteren ersetzt. Die doppelte Analogie der dreiseitigen Ecke mit Winkel und Dreieck gab Anlass zu einer getrennten Behandlung ihrer entsprechenden Eigenschaften. Als vollständiges Analogon zum Dreieck erforderte das Tetraeder eine gesonderte, eingehendere Untersuchung, ebenso als Analogon zum Parallelogramm die Säule (welchen Namen ich für das unerträgliche „Parallelepipedon“ setze). Dem Begriffe der regelmässigen Polyeder ist der der „homogenen“ vorausgeschickt. — In der rechnenden Stereometrie sind



## IV

solche Körper übergangen, welche nicht schon vorher zu Betrachtungen Anlass gaben, und auch sonst kein Interesse bieten, namentlich auch der Obelisk. Die sphärische Trigonometrie ist durchaus analog mit der ebenen behandelt. Es mag an dieser Stelle noch bemerkt werden, dass die Zerlegung der Kugel­fläche in regelmässige Polygone (Nr. 86) interessanten Stoff zu Aufgaben der sphärischen Trigonometrie liefert. — Ich habe endlich den Versuch gemacht, die allgemeinen Flächen zweiter Ordnung in elementarer Weise vorzuführen. Muss man auch im elementaren Unterrichte von einer Betrachtung ihrer Eigenschaften Abstand nehmen, so erscheint es doch wünschenswert, den Schüler wenigstens mit ihren Formen bekannt zu machen, was obendrein durch die schönen Brill'schen Kartonmodelle jetzt so sehr erleichtert ist. Die Art und Weise, wie ich diese Flächen eingeführt und klassifiziert habe, mag durch den bescheidenen Zweck, welcher dabei verfolgt wurde, entschuldigt werden.

Seit dem Erscheinen des dritten Bandes dieses Lehrbuches ist durch einen Erlass des preussischen Kultusministers vom 23. Januar 1880 (abgedruckt in Stiehl's Centralblatt S. 269) die Einführung fünf- oder vierstelliger Logarithmentafeln in den Schulen empfohlen worden. Der in jenem Bande gemachte Versuch, die vierstelligen Logarithmen für den Unterricht zu verwerten, hat hierdurch eine bedeutungsvolle Unterstützung gefunden. — Da der Druck des vorliegenden Bandes noch nicht begonnen hatte, als die preussische Verfügung über die neue Orthographie der Schulbücher erschien, so erklärt es sich, dass diese Orthographie in dem vorliegenden Bande bereits durchgeführt ist.

Schliesslich sage ich denjenigen Herren, welche mir Vorschläge zu Aenderungen oder Vervollständigungen in den drei ersten Bänden dieses Werkes gemacht haben, nicht minder auch der Verlagshandlung für die Liberalität, mit der sie allen meinen Wünschen hinsichtlich der Ausstattung des Werkes entgegengekommen ist, hierdurch meinen ergebensten Dank, und bitte meine Fachgenossen, auch dem vorliegenden Schlussbande freundliche Beachtung schenken zu wollen.

Waren, im August 1880.

V. Schlegel.



# Inhalt des vierten Teils.

## Einleitung (1. 2).

|                                                                                           | Seite |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 1. Uebersicht über die Grundgebilde des Raumes. — 2. Hilfsmittel der Anschauung . . . . . | 1     |

## Reine Stereometrie.

(Stereometrie der bewegten Gebilde.)

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>A. Die Ebene und ihre Bewegungen im Raume (3—49)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <b>6</b> |
| $\alpha$ ) Einmalige Bewegung der Ebene (3—22) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 6        |
| 3. Entstehung und Bestimmung der Ebene — 4. Fortsetzung.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |          |
| 1) Lagen- und Richtungsänderung der Ebene (5—9) .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 9        |
| 5. Bewegung der Ebene. — 6. Bewegung eines auf der Ebene liegenden Punktes. — 7. Bewegung einer auf der Ebene liegenden Geraden. — 8. Parallele Geraden in parallelen Ebenen. — 9. Windschiefe Geraden in parallelen Ebenen.                                                                                                                                                                                                                                                   |          |
| 2) Seitenänderung der Ebene. — Der Raumwinkel (10—22)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 15       |
| 10. Drehung. — 11. Beziehungen zwischen zwei Ebenen.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |          |
| <b>Der Raumwinkel zweier Ebenen</b> . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 16       |
| 12. Definition des Raumwinkels zweier Ebenen.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |          |
| 13. Bewegung einer in der Ebene liegenden Geraden. Vorbemerkung. — 14. a) Die Gerade in schiefer Richtung zur Axe. Resultat der Drehung: Die gemeine Kegelfläche. — 15. b) Die Gerade in paralleler Richtung zur Axe. Resultat der Drehung: Die gemeine Cylinderfläche. — 16. c) Die Gerade in senkrechter Richtung zur Axe. Resultat der Drehung: Die Ebene. — 17. Zurückführung des Raumwinkels auf einen ebenen Winkel. — 18. Die Gerade in senkrechter Richtung zur Ebene. |          |
| <b>Der Neigungswinkel einer Geraden und einer Ebene</b> . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 26       |
| 19. Definition und Eigenschaften des Neigungswinkels einer Geraden und einer Ebene. — 20. Entfernung. — 21. Neigungswinkel paralleler Geraden und Ebenen.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |          |
| 22. Bewegung einer in der Ebene liegenden Kreislinie. Resultat der Drehung: Die Kugelfläche.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |          |
| $\beta$ ) Zweimalige Bewegung der Ebene (23—38) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 33       |
| 23. Uebersicht. — 24. Drei in einer Geraden sich schneidende Ebenen. — 25. Zwei von einer dritten geschnittene parallele Ebenen. — 26. Die unendlich ferne Gerade einer Ebene. — 27. Drei in parallelen Geraden sich schneidende Ebenen.                                                                                                                                                                                                                                       |          |



## VI

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Seite     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Die dreiseitige Ecke . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <b>37</b> |
| 1) Die Ecke als Analogon zum Winkel . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 37        |
| 28. Drei in einem Punkte sich schneidende Ebenen. Die dreiseitige Ecke. Vorbemerkungen. — 29. Einteilung der Ecken nach ihrer Grösse. — 30. Nebenecken, Nebenscheitelecken und Scheitelecken.                                                                                                                                                                                  |           |
| 2) Die Ecke als Analogon zum Dreieck . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 41        |
| 31. Vorbemerkungen. — 32. Bestimmung der Ecke durch Seiten und Winkel. — 33. Die drei ersten Fälle der Bestimmung einer Ecke durch drei Stücke. — 34. Die Polarecke. — 35. Die drei letzten Fälle der Bestimmung einer Ecke durch drei Stücke. — 36. Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten einer Ecke. — 37. Die rechte Ecke und ihre Polarecke. — 38. Das Kugeldreieck. |           |
| $\gamma$ ) Drei- und mehrmalige Bewegung der Ebene (39—49)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 53        |
| 39. Vorbemerkungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |           |
| a) Das Tetraeder (40—44) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 54        |
| 40. Definitionen. — 41. Das rechteckige Tetraeder. — 42. Beziehungen zwischen den Ecken eines Tetraeders — 43. Bestimmung des Tetraeders durch seine Stücke. — 44. Beziehungen zwischen den Ecken und Seiten eines Tetraeders.                                                                                                                                                 |           |
| b) Die Pyramide (45. 46) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 61        |
| 45. Definitionen, und Eigenschaften der Pyramide. — 46. Schnittebenen der Pyramide.                                                                                                                                                                                                                                                                                            |           |
| c) Der Kegel (47. 48) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 65        |
| 47. Definitionen, und Eigenschaften des Kegels. — 48. Schnittebenen des gemeinen Kegels.                                                                                                                                                                                                                                                                                       |           |
| d) Das Pentaeder (49) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 70        |
| 49. Uebersicht.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |           |
| <b>B. Die Figur und ihre Bewegungen im Raume (50—89)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <b>71</b> |
| 1) Lagen- und Richtungsänderung der Figur (50—70)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 71        |
| a) Einmalige Bewegung der Figur (50—61) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 71        |
| a) Bewegung des Dreiecks: Das dreiseitige Prisma .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 71        |
| 50. Definitionen, und Eigenschaften des dreiseitigen Prismas. — 51. Diagonalschnitte.                                                                                                                                                                                                                                                                                          |           |
| b) Bewegung des Parallelogramms: Die Säule . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 74        |
| 52. Definitionen, und Eigenschaften der Säule. — 53. Eigenschaften der Gegenflächen, Gegenwinkel und Gegenecken. — 54. Specielle Arten der Säule. — 55. Diagonalschnitte, Axen und Diagonalaxen.                                                                                                                                                                               |           |
| c) Bewegung des Polygons: Das Prisma . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 78        |
| 56. Definitionen, und Eigenschaften des Prismas. — 57. Pyramide und Prisma. — 58. Schnittebenen des Prismas.                                                                                                                                                                                                                                                                   |           |
| d) Bewegung des Kreises: Der Cylinder . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 81        |
| 59. Definitionen, und Eigenschaften des Cylinders. — 60. Kegel und Cylinder. — 61. Schnittebenen des gemeinen Cylinders.                                                                                                                                                                                                                                                       |           |
| $\beta$ ) Mehrmalige Bewegung der Figur (62—70) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 85        |
| 62. Vorbemerkung.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |           |
| Bewegung des Parallelogramms . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 86        |
| 1. Die geometrischen Operationen mit Säulen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 86        |
| 63. Addition. — 64. Subtraktion. — 65. Multiplikation. — 66. Teilung. — 67. Messung.                                                                                                                                                                                                                                                                                           |           |



|                                            |    |
|--------------------------------------------|----|
| 2. Säule und dreiseitiges Prisma . . . . . | 90 |
|--------------------------------------------|----|

68. Sätze.

|                                               |    |
|-----------------------------------------------|----|
| 3. Dreiseitiges Prisma und Pyramide . . . . . | 91 |
|-----------------------------------------------|----|

69. Sätze. — 70. Rückblick.

|                                               |    |
|-----------------------------------------------|----|
| 2) Seitenänderung der Figur (71—89) . . . . . | 94 |
|-----------------------------------------------|----|

|                                                         |    |
|---------------------------------------------------------|----|
| a) Bewegung des Polygons: Der Rotationskörper . . . . . | 94 |
|---------------------------------------------------------|----|

71. Bewegung des rechtwinkligen Dreiecks: Der gerade Kegel. —

72. Bewegung des Rechtecks: Der gerade Cylinder. — 73. Bewegung eines Trapezes: Der gerade Kegelstumpf. — 74. Bewegung eines Polygons: Der Rotationskörper.

|                                                  |    |
|--------------------------------------------------|----|
| b) Bewegung des Halbkreises: Die Kugel . . . . . | 95 |
|--------------------------------------------------|----|

75. Entstehung der Kugel. — 76. Kugel und Punkt. — 77. Kugel und Ebene.  $\alpha$ ) Sekantenebenen. — 78.  $\beta$ ) Tangentenebenen. — 79. Konstruktion einer Kugel aus gegebenen Bedingungen. Vorbemerkung. — 80. Sätze über den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugel. — 81. Sätze von drei Flächen, die sich in derselben Linie schneiden. — 82. Sätze von vier Linien, die sich in demselben Punkte schneiden. — 83. Kugel und Polyeder. — 84. Tetraeder. — 85. Homogene Polyeder. — 86. Teilung der Kugelfläche in regelmässige Polygone. — 87. Regelmässige Polyeder. — 88. Zwei Kugelflächen. — 89. Sätze über den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugel.

## Rechnende Stereometrie.

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 90. Vorbemerkung . . . . . | 114 |
|----------------------------|-----|

|                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| 1) Der Körperraum als Streckenprodukt (91—97) . . . . . | 114 |
|---------------------------------------------------------|-----|

91. Masseinheit. — 92. Die rechteckige Säule. — 93. Die Säule. —

94. Das Prisma. — 95. Die Pyramide. — 96. Der Pyramidenstumpf. — 97. Polyeder.

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| 2) Die regelmässigen Polyeder (98—101) . . . . . | 118 |
|--------------------------------------------------|-----|

98. Flächenwinkel. — 99. Radien der zugehörigen Kugeln. — 100. Oberfläche, — 101. Volumen.

|                                             |     |
|---------------------------------------------|-----|
| 3) Krummflächige Körper (102—121) . . . . . | 125 |
|---------------------------------------------|-----|

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| a) Der Cylinder . . . . . | 125 |
|---------------------------|-----|

102. Oberfläche des Mantels. — 103. Volumen.

|                        |     |
|------------------------|-----|
| b) Der Kegel . . . . . | 126 |
|------------------------|-----|

104. Oberfläche des Mantels. Der gerade Kegel. — 105. Der gerade Kegelstumpf. — 106. Volumen. Der gemeine Kegel. — 107. Der gemeine Kegelstumpf.

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| c) Rotationskörper . . . . . | 128 |
|------------------------------|-----|

108. Vorbemerkung.

|                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Rotation um eine durch den Mittelpunkt und eine Ecke gehende Axe . . . . . | 128 |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|

109. Oberfläche des Rotationskörpers. — 110. Oberfläche der Kugel. — 111. Kugelzone und Kugelkappe. — 112. Kugeldreieck. — 113. Kugeldreieck.

114. Volumen der Kugel. — 115. Kugelkegel. — 116. Kugelkappe. — 117. Kugelzone. — 118. Kugeldreieck. — 119. Kugeldreieck.



# VIII

|                                                                            |              |
|----------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 2. Rotation um eine die Figur nicht schneidende Axe . . .                  | Seite<br>134 |
| 120. Oberfläche des Rotationskörpers. — 121. Volumen des Rotationskörpers. |              |

## Sphärische Trigonometrie.

|                                                                                                                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 122. Vorbemerkung . . . . .                                                                                                                                   | 138 |
| <b>I. Das rechtwinklige Kugeldreieck (123. 124)</b> . . .                                                                                                     | 138 |
| 123. Formeln. — 124. Anwendung der Formeln.                                                                                                                   |     |
| <b>II. Das schiefwinklige Kugeldreieck (125—133)</b> . . .                                                                                                    | 141 |
| 1. Erste Methode (125—127) . . . . .                                                                                                                          | 141 |
| a. Geometrisches Verfahren . . . . .                                                                                                                          | 141 |
| 125. Der Sinussatz. — 126. Der Cosinussatz.                                                                                                                   |     |
| b. Algebraisches Verfahren . . . . .                                                                                                                          | 144 |
| 127. Gemeinsamer Ursprung des Sinus- und Cosinussatzes.                                                                                                       |     |
| 2. Zweite Methode (128—132) . . . . .                                                                                                                         | 146 |
| 128. Vorbemerkung. — 129. Die Cosinusformeln. — 130. Anwendung der Sinus- und Cosinusformeln. — 131. Die Tangensformeln. — 132. Anwendung der Tangensformeln. |     |
| 3. Dritte Methode (133) . . . . .                                                                                                                             | 152 |
| 133. Methode des Hilfswinkels.                                                                                                                                |     |

## Anhang: Die Flächen zweiter Ordnung.

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 134. Vorbemerkung. — 135. Entstehungsweisen der Flächen zweiter Ordnung . . . . . | 156 |
| 1) Die elliptischen Flächen (136—138) . . . . .                                   | 159 |
| a. Drehung der Ellipse . . . . .                                                  | 159 |
| 136. 1) Das Ellipsoid.                                                            |     |
| b. Drehung der Hyperbel . . . . .                                                 | 159 |
| 137. 2) Das zweischalige Hyperboloid. 3) Das einschalige Hyperboloid.             |     |
| c. Drehung der Parabel . . . . .                                                  | 162 |
| 138. 4) Das elliptische Paraboloid.                                               |     |
| 2) Die cylindrischen Flächen (139—141) . . . . .                                  | 162 |
| a. Verschiebung der Ellipse . . . . .                                             | 162 |
| 139. 5) Die elliptische Cylinderfläche.                                           |     |
| b. Verschiebung der Hyperbel . . . . .                                            | 163 |
| 140. 6) Die hyperbolische Cylinderfläche.                                         |     |
| c. Verschiebung der Parabel . . . . .                                             | 163 |
| 141. 7) Die parabolische Cylinderfläche.                                          |     |
| 3) Die windschiefe Fläche (142) . . . . .                                         | 163 |
| 142. 8) Das hyperbolische Paraboloid.                                             |     |

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| Uebungssätze und Aufgaben . . . . . | 165 |
| Register . . . . .                  | 190 |
| Berichtigungen . . . . .            | 192 |



## Einleitung.

---

1. *Uebersicht über die Grundgebilde des Raumes.* — Die Lehre von den Gebilden im Raume und ihren Beziehungen zu einander heisst Stereometrie.\*) Im Gebiete der Ebene waren der Punkt und die Gerade diejenigen Grundgebilde, durch deren Bewegung alle übrigen Gebilde abgeleitet wurden. Im Gebiete des Raumes tritt zu diesen beiden Grundgebilden als drittes noch die Ebene hinzu. Wie im Gebiete der Geraden beliebige Punkte, im Gebiete der Ebene beliebige Punkte und Geraden, so können im Gebiete des Raumes beliebige Punkte, Geraden und Ebenen angenommen werden. — Im Gebiete der Ebene konnte eine Gerade die beiden Arten ihrer Bewegung, Verschiebung und Drehung, nur auf je eine Art ausführen (wenn wir zwei entgegengesetzte Bewegungen als gleichartig ansehen), ein Punkt jedoch seine Lagenänderung auf unendlich viele Arten. Demnach entstand durch Bewegung der Geraden stets ein und dasselbe Gebilde, nämlich ein Teil der Ebene, durch Bewegung des Punktes dagegen Kurven von mannigfacher Gestalt. Und es führte infolge dessen die Bewegung einer Geraden zu einfacheren Gebilden als diejenige des Punktes. Daraus folgte weiter, dass es zweckmässig war, erst die Bewegungen der Geraden zu betrachten, und dann erst diejenigen des Punktes, und zwar in Verbindung mit der Bewegung einer Geraden, auf welcher der Punkt sich befand. — Im Gebiete des Raumes verhält sich nun die Ebene geradeso, wie im

---

\*) Da die Stereometrie nur ein Zweig der allgemeinen Raumwissenschaft ist, zu welcher die Einleitung bereits dem zweiten Teile dieses Werkes vorausgeschickt wurde, so muss hier auch auf jene Einleitung verwiesen werden.



Gebiete der Ebene die Gerade. Auch die Ebene kann die beiden Arten ihrer Bewegung, Verschiebung und Drehung, nur auf je eine Art ausführen, die Gerade und der Punkt dagegen die ihrigen auf unendlich viele Arten. Wir werden also dem entsprechend in erster Linie die Bewegungen der Ebene untersuchen, dagegen diejenigen der Geraden und eines Punktes erst in Verbindung mit den Bewegungen einer Ebene, auf welcher diese Gebilde sich befinden.

2. *Hilfsmittel der Anschauung.* — Wie im Gebiete der Ebene zahlreichere Gebilde und Beziehungen zwischen denselben existieren als im Gebiete der Geraden, so zeigt das Gebiet des Raumes in dieser Hinsicht wieder eine grössere Reichhaltigkeit und Mannigfaltigkeit als das der Ebene. Aber die Untersuchung dieser Gebilde und Beziehungen wird dadurch erheblich erschwert, dass es nicht, wie in der Geometrie, möglich ist, dieselben in ähnlicher Darstellung auf einer Ebene zu veranschaulichen. Wir können zwar eine Tafel oder ein Blatt Papier als Abbild einer Ebene benutzen und darauf unsere Zeichnungen von ebenen Figuren entwerfen; aber wir können kein Abbild des Raumes herstellen, sondern müssen uns mit dem thatsächlich gegebenen Weltraume begnügen. In diesem aber können wir nicht Linien und Punkte zeichnen, wie auf einer Ebene, und ebensowenig Flächen. Es handelt sich also darum, Hilfsmittel zu finden, durch welche wir die Gebilde und ihre Beziehungen im Raume unserem Auge anschaulich machen können. Solche Hilfsmittel sind:

1) Modelle. Unter Modellen versteht man vollkommen ähnliche Darstellungen von Gebilden im Raume. Dieselben leisten hiernach für die Anschauung dasselbe wie die Zeichnungen in der Geometrie; aber ihre Herstellung ist bei weitem umständlicher, ebenso ihre Vervielfältigung und Abänderung. Die Konstruktion beliebig vieler Gebilde, die bei der Zeichnung lediglich die Instrumente Lineal und Zirkel erfordert, im Uebrigen aber dem Zeichnenden die grösste Freiheit lässt, ist daher hier so gut wie ausgeschlossen.

Anm. Räumliche Konstruktionen können jedoch in Gedanken ausgeführt und mit Worten beschrieben werden. Zu den praktisch ausführbaren Forderungen der Geometrie: „Konstruktion einer Geraden und einer Kreislinie in der Ebene“ treten dann noch die eben nur in Gedanken ausführbaren Forderungen der Stereometrie: „Konstruktion einer Ebene, einer Cylinder-, Kegel- und Kugelfläche im Raume“.

Man hat zu unterscheiden Modelle von Körpern, Flächen und Linien. Modelle von Körpern werden aus Holz, Gips,



Glas, Metall, Pappe etc. hergestellt, und zwar massiv oder hohl nach der Beschaffenheit des Stoffes. \*) Gläserne gewähren den Vorteil, vermöge ihrer Durchsichtigkeit alle Kanten und Ecken des Körpers gleichzeitig erkennen zu lassen (freilich, wenn sie massiv sind, wegen der Strahlenbrechung nicht am wahren Orte). Für Körper, deren Oberfläche aus ebenen Figuren besteht, empfiehlt sich als leicht ausführbar das Ausschneiden ihrer Oberfläche aus einem einzigen Stück Pappe oder Papier, worauf die Fläche an den Kanten umbogen wird und je zwei Kanten, die in eine einzige zusammenfallen sollen, durch Ueberkleben an einander befestigt werden. Zur Herstellung dieser Modelle bedarf man einer Zeichnung (Netz des Körpers), welche die sämtlichen Kanten und Figuren der Oberfläche des Körpers auf einer einzigen Ebene darstellt. — Ebenen, welche durch den Körper gelegt sind, lassen sich durch Schnitte darstellen. Der Körper besteht alsdann aus mehreren Teilen, die sich beliebig trennen und zusammensetzen lassen. \*\*) — Flächen können als Oberflächen von Körpern dargestellt werden (so die Kugelfläche als Oberfläche des Kugelkörpers), oder in Blattform (aus Papier, Pappe, Glas; aus ersterem Stoffe besonders leicht die Ebene, die Cylinder- und Kegelfläche), oder endlich durch Netze von Linien, die sich auf ihnen ziehen lassen, und die durch ihren Verlauf ein, wenn auch nicht völlig zusammenhängendes, Bild der Fläche geben. \*\*\*) — Linien auf Flächen werden, wie immer, durch Zeichnung dargestellt. — Linien im Raume, sofern sie nicht an Körpern oder Flächen erscheinen, werden durch Fäden oder Drähte dargestellt, Punkte im Raum als Schnitte von Linien.

2) Abbildungen. Um Gebilde im Raume samt ihren Beziehungen durch Zeichnung in der Ebene darzustellen, denkt man sich die Gebilde zwischen dem betrachtenden Auge ( $A$ , Augenpunkt) und einer Ebene ( $\alpha$ , Projektionsebene) ge-

---

\*) Solche Modelle werden u. a. geliefert von der „Leipziger Lehrmittel-Anstalt“ (Dr. O. Schneider), und in besonders reichhaltiger Auswahl von der „Lehrmittel-Anstalt J. Ehrhard & Co.“ in Bensheim a. d. Bergstr.

\*\*) Hohlkörper aus Glas, zum teil mit gefärbtem Wasser gefüllt, und in verschiedenen Lagen gehalten, würden die verschiedenen ebenen Schnitte eines Körpers am besten zur Anschauung bringen.

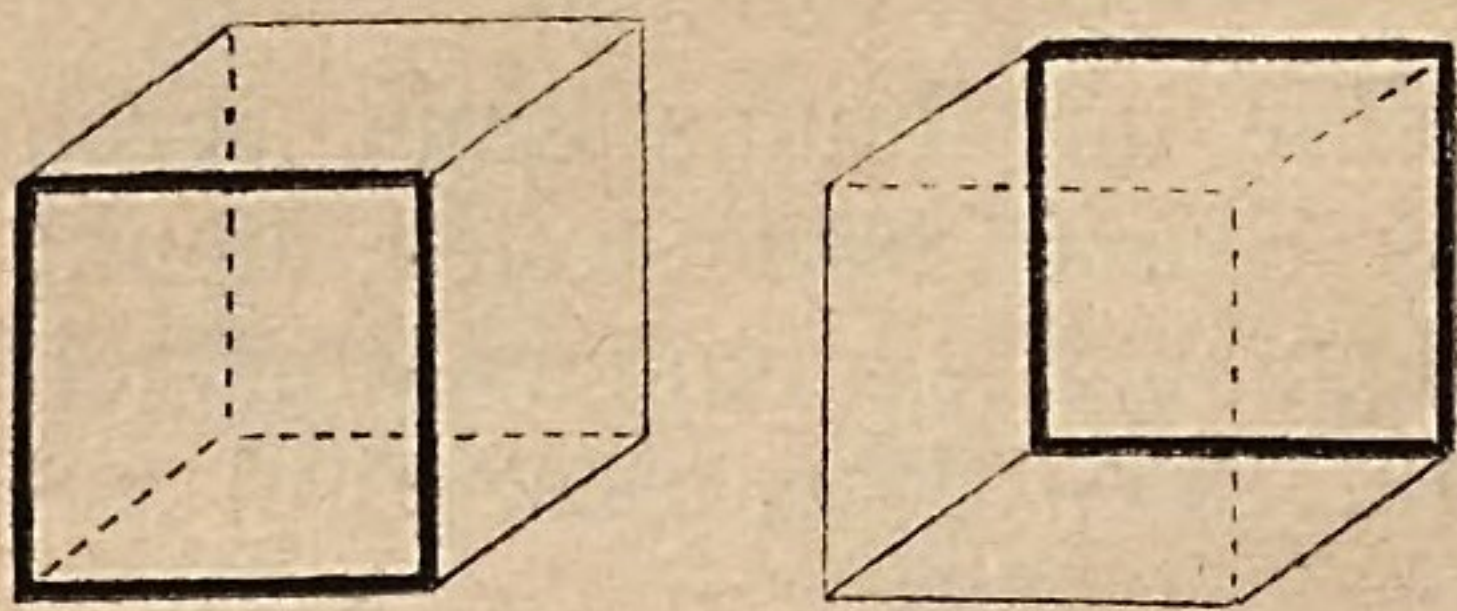
\*\*\*) Hierher gehören die „Kartonmodelle“ und die (erheblich teureren) „Fadenmodelle“ von Flächen zweiter Ordnung (L. Brill in Darmstadt), von denen jedes vermöge seiner Beweglichkeit eine ganze Reihe von Flächen derselben Art darstellt und gleichzeitig die auf der Fläche konstruierbaren Kreis- bzw. geraden Linien zur Anschauung bringt.



legen. Jeder Punkt (Eckpunkt oder Endpunkt) des Gebildes verdeckt dann für das Auge einen Punkt der Ebene, jede Linie des Gebildes eine Linie der Ebene. Sind dann diese verdeckten Punkte und Linien auf der Ebene (a) gezeichnet, so gewährt nach Entfernung des Gebildes diese Zeichnung dem in *A* befindlichen Auge denselben Anblick der Punkte und Linien, wie vorher das Gebilde selbst. \*) (Der Unterschied der Entfernungen kommt erst beim Sehen mit beiden Augen zum Bewusstsein.) Diese Art der Abbildung heisst schiefe Projektion (vgl. T. II, Nr. 140). Bei dieser Darstellung, welche ebenso subjektiv getreu ist, wie diejenige durch Modelle objektiv getreu, erleiden die Winkel und Strecken Aenderungen ihrer Grösse (Beispiele liefert jedes Bild eines von geraden Linien begrenzten Gegenstandes). Daher muss man, um solche Abbildungen ohne das Gebilde selbst richtig herzustellen, diese Aenderungen kennen, die wieder von der gegenseitigen Lage des Gebildes, des Augenpunktes und der Projektionsebene abhängen. Die Wissenschaft, welche solche Abbildungen darzustellen lehrt, heisst beschreibende (deskriptive) Geometrie. — Ein von ebenen Figuren begrenzter Körper kann entweder so dargestellt werden, dass sämtliche, oder so, dass nur die dem Auge gleichzeitig sichtbaren Ecken und Kanten gezeichnet werden. Man wird den Körper im ersten Falle als durchsichtig, im zweiten als undurchsichtig betrachten.

Anm. Im ersten Falle sind die in das Innere der Zeichnung fallenden Kanten zum teil offene, zum teil verdeckte. Betrachtet man beide Arten von Kanten mit entgegengesetzter Eigenschaft behaftet, so stellt dieselbe Zeichnung eine andere Ansicht desselben Körpers dar. (S. die nebenstehenden verschiedenen Abbildungen eines Würfels, die beide, als geometrische Figuren betrachtet, kongruent sind. Der Unterschied tritt am besten bei der Betrachtung mit einem Auge hervor.)

Fig. 1.



Denkt man sich den Augenpunkt in unendliche Entfernung gerückt, so entsteht die (in Fig. 1, wie in allen folgenden Figuren angewendete) Parallelprojektion, welche gegenüber der schiefen den Vorteil gewährt, dass parallele Geraden in der Darstellung parallel bleiben, wodurch die Herstellung der

\*) Genau dieselbe Methode wird in der Praxis beim Zeichnen mikroskopischer Bilder befolgt.



Zeichnung wesentlich erleichtert wird. Als Beispiel dieser Projektion kann die Abbildung eines Gegenstandes durch den von der Sonne herrührenden Schatten (Silhouette) angesehen werden.

Anm. Wie ist das Verhältnis der Grösse des Bildes zu der des Körpers bei der schiefen und bei der Parallelprojektion?

Krumme Flächen werden dadurch abgebildet, dass man ihre Grenzen und charakteristischen Linien, welche die Beschaffenheit ihrer Krümmung angeben, abbildet. Oder man denkt sich die Flächen in einer bestimmten Richtung beleuchtet, und giebt dann die durch ihre Krümmung hervorgerufene Verteilung von Licht und Schatten durch Schattierung wieder.

Anm. Die erste Art der Darstellung unterscheidet z. B. das Bild eines Globus von einem Kreise, die zweite das einer Kugel von einem Kreise, das eines Kegels von einem Sektor.

Die Anschaulichkeit der Abbildungen wird ausserordentlich erhöht, wenn man von einem Gebilde zwei Abbildungen aus verschiedenen Augenpunkten besitzt und diese Bilder durch ein Stereoskop betrachtet. Das stereoskopische Bild lässt dann die wirkliche Lage der Teile des Gebildes hinter einander deutlich erkennen. \*) (Um von einer einzelnen Abbildung einen annähernd ähnlichen Eindruck zu haben, muss man dieselbe mit einem Auge betrachten.)

3) Schnitte. Um gewisse Eigenschaften und Beziehungen eines Gebildes zur Anschauung zu bringen, genügt es, sich dasselbe durch eine Ebene geschnitten zu denken und die Schnittlinien und Schnittpunkte des Gebildes mit dieser Ebene zu zeichnen. (So kann ein Cylinder für manche Zwecke durch einen Kreis, für andere durch ein Parallelogramm ersetzt werden.) War das Gebilde durch einfache Bewegung einer ebenen Figur entstanden, so genügt die Zeichnung dieser ebenen Figur ebenfalls für manche Zwecke, da man sich nur vorzustellen braucht, dass dieselbe jener Bewegung unterworfen werde. Aus den Eigenschaften und Beziehungen der gegebenen Figur folgen dann entsprechende des daraus entstandenen räumlichen Gebildes. Viele Sätze der Stereometrie lassen sich auf diese Weise aus Sätzen der Geometrie ableiten.

---

\*) Eine grosse Anzahl solcher stereoskopischen Bilder ist der Schrift von Hugel: „Die regulären und halbrekulären Polyeder“ (Neustadt a. d. H. Witter) beigegeben. Einige dieser Bilder finden sich auf der diesem Buche beigegebenen Tafel.

---



# Reine Stereometrie.

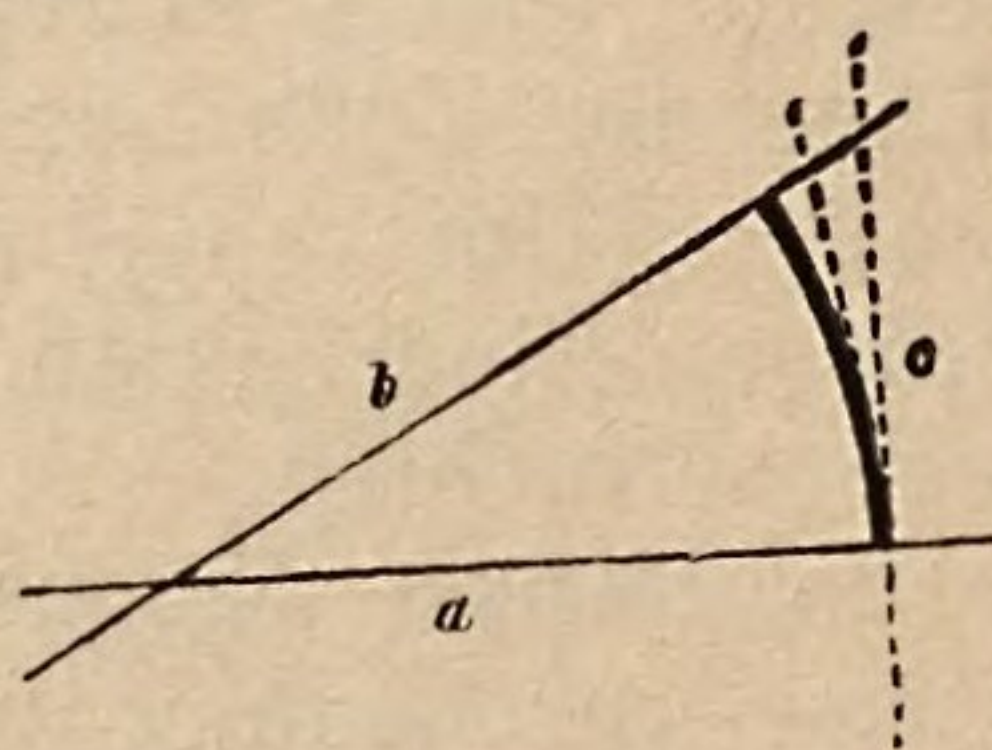
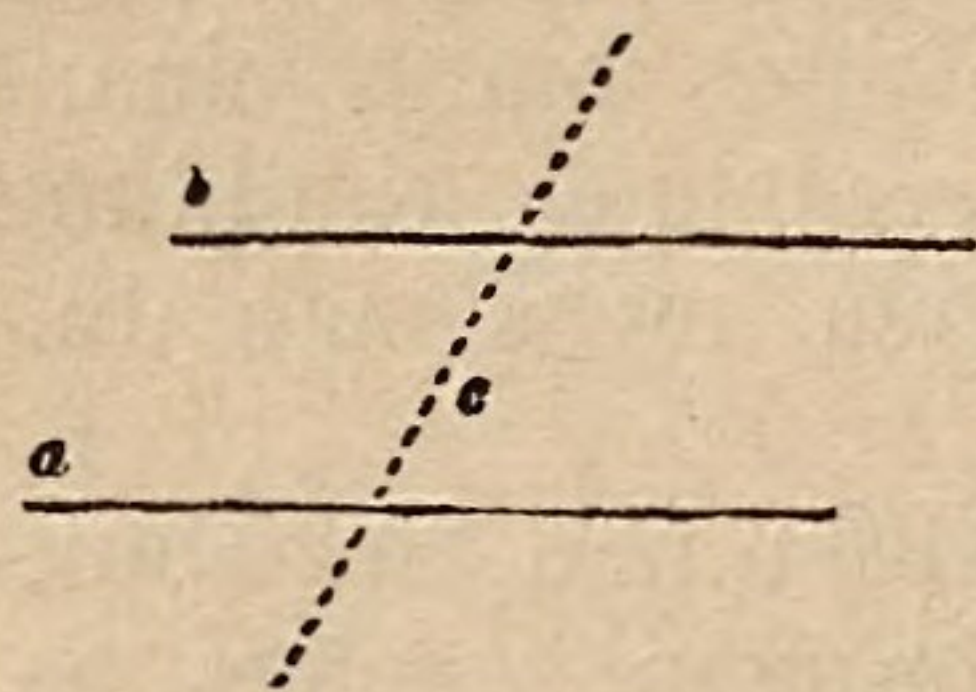
(Stereometrie der bewegten Gebilde.)

## A. Die Ebene und ihre Bewegungen im Raume.

a) Einmalige Bewegung der Ebene.

3. *Entstehung und Bestimmung der Ebene.*\*) — Wenn zwei Geraden ( $a$ ,  $b$ ) einen (endlich oder unendlich fernen) Punkt

Fig. 2.



gemeinsam haben, und die erste Gerade durch einfache Bewegung in die zweite übergeht (d. h. so, dass ein beliebiger Punkt der ersten Geraden die

Richtung auf einen beliebigen festen oder bestimmten beweglichen Punkt der zweiten Geraden innehält), so ist die von der bewegten Geraden beschriebene Fläche eine Ebene (T. II, Nr. 27 u. 29). — Da die zweite Gerade auch ausserhalb dieser Ebene im Raume auf unendlich viele Arten angenommen werden kann, so kann die erste auf unendlich viele Arten eine Ebene beschreiben. Das Unterscheidende dieser Bewegungen nennen wir ihre Seite. Bewegt sich also eine Gerade beständig nach derselben Seite, so beschreibt sie eine Ebene (T. II, Nr. 41). Die Ebene ist hiernach bestimmt 1) durch Lage und Richtung der bewegten Geraden, 2) durch die Seite der Bewegung. Die Merkmale einer Ebene sind also Lage, Richtung und Seite.

\*) Der Inhalt von Nr. 3 und 4 gehört eigentlich in die Geometrie der Ebene, und ist grösstenteils bereits in T. II zu finden. Die Wiederholung an gegenwärtiger Stelle findet des besseren Zusammenhanges wegen statt.



Durch die Seite, nach welcher sich die erste Gerade anfänglich bewegt, sind alle Stellungen, die sie künftig durchlaufen wird, von vornherein mitbestimmt. Umgekehrt reicht jede einzelne dieser Stellungen im Verein mit der ersten Geraden dazu aus, jene Seite zu bestimmen (T. II, 8). Da jede Gerade auf einer Ebene als erzeugende Gerade angesehen werden kann, so ist hiernach durch eine beliebige Gerade auf einer Ebene ihre Lage und Richtung, durch zwei beliebige Geraden auf der Ebene ihre Lage, Richtung und Seite, d. h. die Ebene selbst, vollkommen bestimmt. Anders ausgedrückt:

Durch zwei in einem (endlich oder unendlich 1. fernen) Punkte sich schneidende Geraden ( $a, b$ ) kann man nur *eine* Ebene legen.

Anm. Umkehrung: Eine Fläche ist eine Ebene, wenn man in ihr durch jeden ihrer Punkte 2 Geraden ziehen kann.

Eine Gerade, welche zwei Punkte einer Ebene verbindet, liegt ganz in derselben (T. II, 35). Verbindet man also zwei beliebige Punkte der beiden Geraden  $a, b$  (Fig. 2) durch eine Gerade  $c$ , so ist (nach 1) die durch  $a$  und  $b$  bestimmte Ebene auch durch  $a$  und  $c$  (oder durch  $b$  und  $c$ ) bestimmt. Demnach kann man die Entstehung der Ebene auch folgendermassen definieren:

Eine Gerade  $a$  beschreibt eine Ebene, wenn sie 2. sich um einen ihrer Punkte (einschliesslich des unendlich fernen) so dreht, dass sie beständig eine andere Gerade  $c$  schneidet.

4. *Fortsetzung.* — Eine Ebene ist bestimmt:

1) Durch zwei parallele ( $a, b$ ) oder sich schneidende ( $a, c$ ) Geraden (nach 1), oder, da man eine der Parallelen durch einen beliebigen ihrer Punkte (nach T. II, 30) ersetzen kann, und ebenso die schneidende Gerade  $a$  durch ihren Drehungspunkt (nach 2);

2) durch eine Gerade und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt, oder, da man diese Gerade durch zwei beliebige ihrer Punkte ersetzen kann (T. II, 14);

3) durch drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte. Hieraus folgt:

Durch eine Gerade und einen ausserhalb derselben 3. liegenden Punkt, sowie durch drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte kann man nur *eine* Ebene legen.



Anm. Die Konstruktion einer Ebene aus den unter 1), 2), 3) genannten Stücken ist eine der (freilich nur theoretisch erfüllbaren) Forderungen der konstruierenden Stereometrie.

Eine Ebene wird durch drei an beliebige ihrer Punkte gesetzte grosse, oder durch zwei an beliebige ihrer Geraden gesetzte kleine lateinische, oder durch einen kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet.

Aus 1 und 3 folgt: Bewegt eine Ebene sich so, dass sie beständig entweder durch zwei Geraden, oder durch eine Gerade und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt, oder durch drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte geht, so bewegt sie sich in sich selbst.

Anm. Prüfung der ebenen Beschaffenheit des Fussbodens durch Möbeln, bei welchen die Endpunkte der vier Füsse genau in einer Ebene liegen, und umgekehrt. Vorteil der mit drei Füßen versehenen Möbeln.

Die Lage einer Ebene ist bestimmt durch einen beliebigen ihrer Punkte; ihre Lage und Richtung durch eine beliebige ihrer Geraden oder zwei beliebige ihrer Punkte; ihre Lage, Richtung und Seite durch zwei beliebige ihrer Geraden oder drei beliebige ihrer Punkte.

Ein Punkt hat dieselbe oder verschiedene Lage mit einer Ebene, jenachdem er auf oder ausser ihr liegt; eine Gerade hat gleiche Richtung oder dieselbe Lage mit einer Ebene, jenachdem sie keinen oder einen Punkt mit der Ebene gemeinsam hat, sie hat dieselbe Lage und Richtung mit der Ebene, wenn sie ganz in der Ebene liegt.

Zwei Ebenen können nur entweder in der Lage und Richtung oder in der Seite übereinstimmen. Könnte eine Ebene durch Bewegung eines Punktes entstehen, so würden zwei von diesem Punkte auf verschiedene Art beschriebene Ebenen nur diesen Punkt gemeinsam haben, d. h. in der Lage übereinstimmen, und sich in Richtung und Seite unterscheiden. Da aber die Ebene das Resultat der Bewegung einer Geraden ist, so kann sie ihre Lage nicht ohne ihre Richtung ändern, und umgekehrt. Zwei von derselben Geraden beschriebene Ebenen stimmen also in Lage und Richtung überein und unterscheiden sich durch die Seite; zwei von verschiedenen (sich nicht schneidenden) Geraden durch Bewegung nach gleicher Seite beschriebene Ebenen stimmen in der Seite überein und unterscheiden sich durch Lage und Richtung. — Zwei Ebenen haben hiernach niemals nur einen Punkt, sondern stets eine Linie gemeinsam. Diese Linie muss aber eine Gerade sein, weil eine in einer Ebene liegende krumme Linie nur diese eine Ebene erzeugen



kann, während jede andere Fläche, die sie beim Heraustreten aus der Ebene beschreibt, krumm ist.

Also: Zwei Ebenen mit gleicher Lage haben stets 4. eine Gerade gemeinsam.

Anders ausgedrückt: Haben zwei Ebenen dieselbe 5. Lage, so haben sie auch dieselbe Richtung (und umgekehrt).

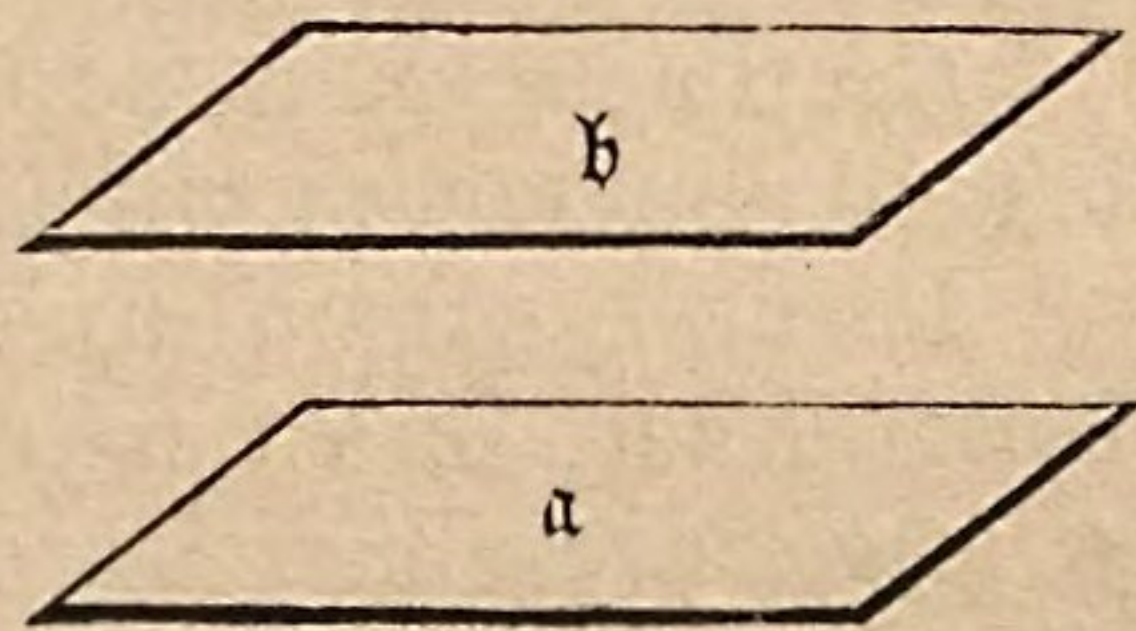
Hiernach ist also eine Ebene vollkommen bestimmt durch ihre Lage und ihre Seite. Man kann also stets eine einzige Ebene konstruieren von gegebener Lage und Seite. — Dagegen ist die Ebene durch Richtung und Seite überbestimmt, weil die gegebene Richtung eine unendliche Menge von Lagen darstellt, während zur Bestimmung der Ebene nur eine derselben erforderlich ist. Man kann also eine Ebene von gegebener Richtung und Seite im allgemeinen nicht konstruieren.

Ferner sind hiernach für eine Ebene, obwohl sie drei Merkmale hat, nur zwei verschiedene Arten der Bewegung denkbar, nämlich 1) Aenderung der Lage und Richtung mit Beibehaltung der Seite, 2) Aenderung der Seite mit Beibehaltung der Lage und Richtung.

### 1) Lagen- und Richtungsänderung der Ebene.

5. *Bewegung der Ebene.* — Ist eine Ebene  $a$  durch Aenderung ihrer Lage und Richtung (ohne ihre Seite zu ändern) in  $b$  übergegangen, so darf keine Gerade (und folglich kein Punkt) zugleich auf  $a$  und  $b$  liegen; denn sonst könnte diese Gerade durch ihre Bewegung jede der beiden Ebenen erzeugen, und da Lage und Richtung einer Ebene durch eine beliebige ihrer Geraden bestimmt wird (Nr. 3), so hätten beide Ebenen dieselbe Lage und Richtung gegen die Annahme. — Wir nennen diese Art der Bewegung einer Ebene Verschiebung.

Fig. 3.



Verschiebung einer Ebene ist also Aenderung ihrer Lage und Richtung mit Beibehaltung ihrer Seite.

Anm. zu Fig. 3. Wie die unendliche Gerade als begrenzte Strecke, so muss die unendliche Ebene als begrenzte Figur abgebildet werden, und zwar geschieht dies aus Gründen der Anschaulichkeit meistens am besten durch das Parallelogramm.

Zwei Ebenen ( $a$ ,  $b$ ) mit verschiedener Lage und Richtung aber gleicher Seite heissen parallel. (In Zeichen  $a \parallel b$ .)



Anm. Diesen Namen führen die Ebenen auch dann noch, wenn eine von ihnen mit entgegengesetzter Seite genommen wird. Ist es nötig, diesen Fall besonders zu bezeichnen, so kann man zwei Ebenen mit verschiedener Lage und Richtung und entgegengesetzter Seite antiparallel nennen. So sind z. B. Decke und Fussboden eines Zimmers, zwei gegenüberstehende Wände desselben, die beiden Seiten eines Blattes Papier antiparallele Ebenen.

Zwei parallele (bezw. antiparallele) Ebenen entstehen, wenn zwei verschiedene, sich nicht schneidende Geraden sich nach gleichen (bezw. entgegengesetzten) Seiten bewegen.

Anm. Schnitten sich die beiden bewegten Geraden, so müssten die beiden entstehenden Ebenen, weil jede eine der beiden Geraden enthält, auch ihren Schnittpunkt gemeinsam haben, also ausser in der Seite noch in der Lage übereinstimmen, d. h. zusammenfallen.

6. Hat eine Ebene ihre Lage geändert, so hat auch jeder Punkt auf ihr seine Lage um dieselbe Strecke geändert. Denn alle ihre Punkte haben gleichgrosse und gleichgerichtete Bewegungen (Lagenänderungen) gemacht. — Wie die Lage einer Ebene durch einen beliebigen Punkt auf ihr vollkommen bestimmt ist, so auch ihre Lagenänderung durch diejenige eines beliebigen Punktes auf ihr.

Eine Ebene kann aus der Lage  $a$  auf unzählige Arten in die Lage  $b$  kommen. Die Lagenänderung der Ebene ist einfach, wenn diejenige eines beliebigen Punktes auf ihr eine einfache ist, d. h., wenn ein beliebiger Punkt auf ihr eine beliebige Gerade beschreibt. Das von der Ebene beschriebene Gebilde ist aber in jedem Falle ein Teil des Raumes, weil wir uns diese Bewegung, wie jede andere, nur innerhalb des Raumes vorstellen können. (Vgl. dagegen die entsprechende Stelle T. II, Nr. 27).

Hiernach kann man im Raume zu einer in ihm gegebenen Ebene beliebige parallele Ebenen legen.

7. Durch einen ausserhalb einer Ebene gegebenen Punkt kann man nur *eine* parallele Ebene legen. Denn die Lage derselben ist durch den gegebenen Punkt, und ihre Seite durch die gegebene Ebene vollkommen bestimmt. Durch Lage und Seite aber ist die Ebene (wie aus 5 folgte) selbst vollkommen bestimmt.

Aus dem Begriff der Gleichheit folgt, dass zwei Seiten, die einer dritten gleich sind, auch unter einander gleich sind.

8. Folglich: Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie auch unter einander parallel.

6. *Bewegung eines auf der Ebene liegenden Punktes.* — Wie die Lage einer Ebene durch einen beliebigen Punkt auf ihr



vollkommen bestimmt ist, so auch ihre einfache Lagenänderung (Verschiebung) durch diejenige eines beliebigen ihrer Punkte. Bewegt sich nun eine Ebene so, dass einer ihrer Punkte eine Gerade beschreibt, so ist die Lagenänderung des Punktes, mithin auch diejenige der Ebene, durch die von dem Punkte zurückgelegte Strecke bestimmt. Gleichen Lagenänderungen entsprechen also gleiche von dem Punkte auf der Geraden zurückgelegte Strecken. Verschiedene Lagenänderungen verhalten sich an Grösse wie die entsprechenden von dem Punkte auf der Geraden zurückgelegten Strecken. — Da ein Punkt  $A$  der Ebene  $a$  durch geradlinige Bewegung jeden Punkt  $B$  der parallelen Ebene  $b$  erreichen kann, so kann auch die Ebene  $a$  auf unendlich viele Arten in die Lage  $b$  kommen. Die auf einander folgenden Lagenänderungen von  $a$  verhalten sich also wie die entsprechenden von dem Punkte  $A$  auf einer beliebigen Geraden zurückgelegten Strecken. Da überdies der Punkt  $A$  beliebig ist, so folgt der Satz:

Werden zwei Geraden im Raume von einer Anzahl paralleler Ebenen geschnitten, so verhalten sich die Strecken auf der einen Geraden ebenso wie die auf der andern.

Aus 9 folgt weiter:

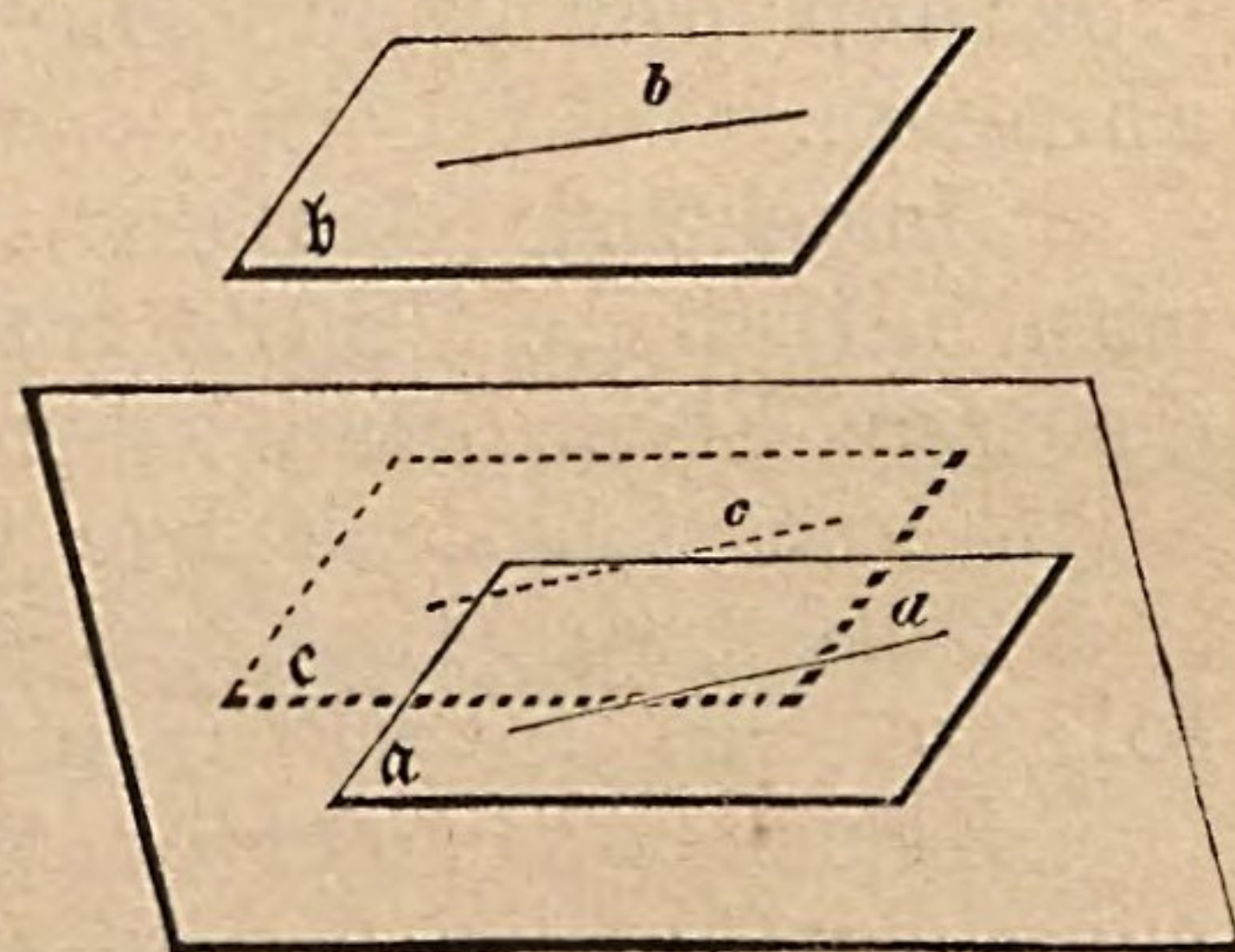
Werden auf *einer* Geraden durch eine Anzahl von parallelen Ebenen gleiche Stücke abgeschnitten, so werden auch auf jeder anderen Geraden durch diese Ebenen gleiche Stücke abgeschnitten.

7. *Bewegung einer auf der Ebene liegenden Geraden.* —

Wenn eine Ebene ihre Lage ändert, so ist mit dieser Bewegung im allgemeinen noch eine Bewegung der Ebene in sich selbst verbunden. Diese letztere Bewegung kann aber von zweifacher Art sein. Wir nennen sie Verschiebung oder Drehung der Ebene in sich selbst, je nachdem eine beliebige in der Ebene liegende Gerade sich durch diese Bewegung verschiebt oder dreht.

(Fig. 4 zeigt in der durch das grosse Parallelogramm dargestellten Ebene die Verschiebung des Ebenenstückes (Parallelogramms)  $a$  nach  $c$ , wobei die Gerade  $a$  sich nach  $c$  verschiebt. Fig. 5 zeigt in derselben

Fig. 4.

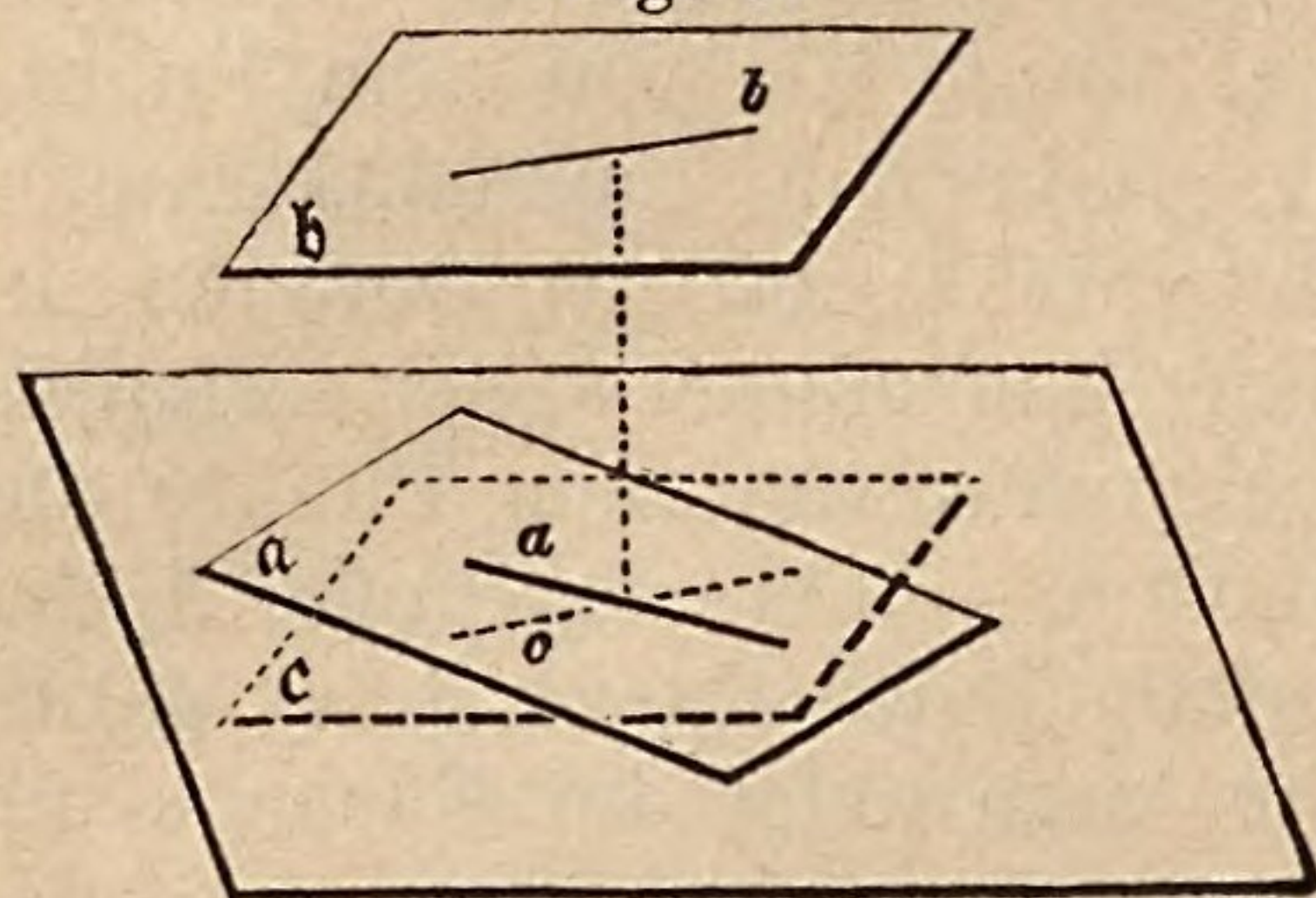




Ebene die Drehung des Ebenenstückes  $a$  nach  $c$ , wobei die Gerade  $a$  sich nach  $c$  dreht.)

Man kann nun die doppelte Bewegung der Ebene (wenn

Fig. 5.



$a$  nach  $b$  rückt) in jedem der beiden Fälle durch zwei nach einander folgende einzelne Bewegungen ersetzen, nämlich durch eine blosse Bewegung der Ebene in sich selbst, wobei  $a$  nach  $c$  geht, und eine blosse Lagenänderung, wobei  $c$  nach  $b$  geht. Durch die Grösse der Verschiebung oder Drehung von  $a$  nach

$c$  wird die Bewegung der Ebene in sich selbst gemessen, durch die Grösse der Verschiebung von  $c$  nach  $b$  die blosse Lagenänderung der Ebene. Die Grösse dieser Verschiebung wird (nach T. II, Nr. 28 und 74) durch jede auf  $b$  und  $c$  senkrecht stehende Strecke gemessen. (In Fig. 5 kann diese Strecke so gewählt werden, dass sie durch den Scheitel des Winkels  $ac$  geht, also zwei Punkte der Geraden  $a$  und  $b$  verbindet.)

11. 8. *Parallele Geraden in parallelen Ebenen.* — Hat eine Ebene ihre Lage ohne Drehung in sich selbst geändert, so hat auch jede Gerade auf ihr nur ihre Lage geändert. Denn eine Richtungsänderung der Geraden würde nach der Definition der Drehung der Ebene in sich selbst eben diese Drehung herbeiführen. (Demnach ist in Fig. 4  $a \parallel b \parallel c$ , und in Fig. 5  $b \parallel c$ .) — Hieraus folgt:

12. Sind zwei Ebenen parallel, so giebt es zu jeder Geraden der einen Ebene parallele Geraden in der anderen.

13. Umgekehrt: Durch zwei parallele Geraden kann man beliebige Paare paralleler Ebenen legen. (Denn die erste Ebene kann beliebig gewählt werden.)

Ferner folgt aus dem Begriff der Parallelität:

14. Sind zwei Geraden im Raume einer dritten parallel, so sind sie unter einander parallel.

Keine Gerade der einen von zwei parallelen Ebenen kann mit einer Geraden der anderen Ebene einen Punkt gemeinsam haben. Denn sonst hätten diesen Punkt die Ebenen selbst gemeinsam. Demnach:

15. Zwei Geraden in parallelen Ebenen haben stets verschiedene Lage.



Da nun keine Gerade der einen Ebene mit der anderen Ebene einen Punkt gemeinsam hat, so sagt man, dass die Geraden der einen Ebene der anderen Ebene parallel seien. Also:

Sind zwei Ebenen parallel, so ist jede in der 16. einen Ebene liegende Gerade der anderen Ebene parallel.

Durch einen Punkt ausserhalb einer Ebene kann 17. man beliebige zu der Ebene parallele Geraden ziehen.

Durch eine Gerade, welche einer Ebene parallel 18. ist, kann man eine zu dieser Ebene parallele Ebene legen. (Denn die Gesamtheit der durch 16 bestimmten Geraden bildet eine Ebene, welche durch jede dieser Geraden hindurchgeht und bestimmt ist.)

Anm. 18 ist Umkehrung von 16. Welche andere Umkehrung von 16 lässt sich noch aufstellen?

Aus 13 und 16 folgt:

Sind zwei Geraden parallel, so ist jede derselben 19. parallel jeder durch die andere gelegten Ebene. Anders ausgedrückt: Eine Gerade ist einer Ebene parallel, wenn man in der Ebene eine Parallele zu ihr ziehen kann.

Anm. Durch diesen Satz wird für die Parallelität einer Ebene mit einer Geraden ein Merkmal aufgestellt, welches dieselbe auf die Parallelität von Geraden zurückführt.

Umgekehrt: Ist eine Gerade  $a$  einer Ebene  $b$  paral- 20. lel, so ist sie jeder in der Ebene  $b$  liegenden Geraden  $b$  parallel, die mit ihr selbst in einer Ebene liegt. Denn schnitten sich  $a$  und  $b$ , so müsste, weil  $b$  ganz in  $b$  liegt, auch  $b$  von  $a$  geschnitten werden, was gegen die Annahme ist.

Ist eine von zwei Parallelen einer Ebene paral- 21. lel, so ist auch die andere derselben parallel.

Anm. Gilt auch die Umkehrung dieses Satzes?

Sind die Schenkel eines Winkels einer Ebene ( $a$ ) 22. parallel, so ist die Ebene ( $b$ ) des Winkels der Ebene ( $a$ ) parallel. Denn die durch einen Schenkel nach 18 parallel gelegte Ebene enthält nach der zweiten Umkehrung von 18 (s. Anm. daselbst) auch den andern Schenkel. Durch beide Schenkel ist aber die Ebene ( $b$ ) bestimmt.

Konstruiert man in der Ebene  $a$  einen Winkel, dessen Schenkel denen des Winkels in der Ebene  $b$  parallel sind, so ist auch  $a$  durch diesen neuen Winkel vollkommen bestimmt. Mithin:



23. Sind die Schenkel zweier Winkel paarweise parallel, so sind die Ebenen der Winkel parallel (und die Winkel gleich).

Anm. Durch diesen Satz wird für die Parallelität zweier Ebenen ein Merkmal aufgestellt, welches dieselbe auf die Parallelität von Geraden zurückführt. — Aus der Definition des Winkels als Richtungsunterschied folgt, dass die beiden Winkel auch einander gleich sind. Der Satz 53 in T. II gilt also allgemein.

Hieraus folgt die Lösung der

Aufgabe 1. — Durch einen gegebenen Punkt  $A_1$  zu einer gegebenen Ebene  $ABC$  die parallele Ebene zu legen.

Man lege die Ebenen  $A_1AB$  und  $A_1AC$ , ziehe in der ersteren  $A_1B_1 \parallel AB$ , in der letzteren  $A_1C_1 \parallel AC$ , und lege die Ebene  $A_1B_1C_1$ . Diese ist die gesuchte.

24. 9. *Windschiefe Geraden in parallelen Ebenen.* — Hat eine Ebene ihre Lage mit Drehung in sich selbst geändert, so hat jede Gerade auf ihr ihre Richtung geändert.

Ist durch diese Bewegung die Gerade  $a$  (Fig. 5) in  $b$  übergegangen, so haben  $a$  und  $b$  verschiedene Lage (nach 15) und ungleiche Richtung (nach 24). — Zwei Geraden ( $a, b$ ) mit verschiedener Lage und ungleicher Richtung heissen windschief.

25. Sind zwei Ebenen parallel, so sind alle Geraden der einen Ebene mit einer gegebenen Geraden der anderen Ebene entweder parallel oder windschief.

Da in derselben Ebene zwei Geraden mit verschiedener Lage und ungleicher Richtung nicht vorkommen können (T. II, Nr. 30), so folgt weiter:

26. Durch zwei windschiefe Geraden kann man keine Ebene legen.

Da ferner zwei windschiefe Geraden in zwei parallelen Ebenen enthalten sind, so folgt umgekehrt:

27. Durch zwei windschiefe Geraden kann man zwei parallele Ebenen legen. — Sind  $a$  und  $b$  die Geraden,  $\alpha$  und  $\beta$  die Ebenen (Fig. 5), so muss nach 16  $b \parallel \alpha$  sein. Da nun die Ebene  $\alpha$  ausserdem die Gerade  $a$  enthalten muss, so kann  $\alpha$  nicht beliebig angenommen werden, sondern ist vollständig bestimmt. Es ist daher auch nur ein Paar paralleler Ebenen möglich. Hieraus folgt weiter:

28. Durch eine von zwei windschiefen Geraden kann



man nur *eine* Ebene legen, die mit der anderen parallel ist. — Sind  $a$  und  $b$  die Geraden,  $\alpha$  die Ebene, so ist  $\alpha$  erstens durch  $a$  bestimmt. Da ferner  $b \parallel \alpha$  sein soll, so kann man nach 20 in  $\alpha$  die Gerade  $c \parallel b$  ziehen, wobei  $c$  und  $b$  in einer Ebene liegen. Dann ist  $\alpha$  zweitens durch  $c$  bestimmt (nach 19). Hieraus folgt die Lösung der

Aufgabe 2. — Durch eine von zwei windschiefen Geraden  $a$  diejenige Ebene zu legen, welche mit der anderen  $b$  parallel ist.

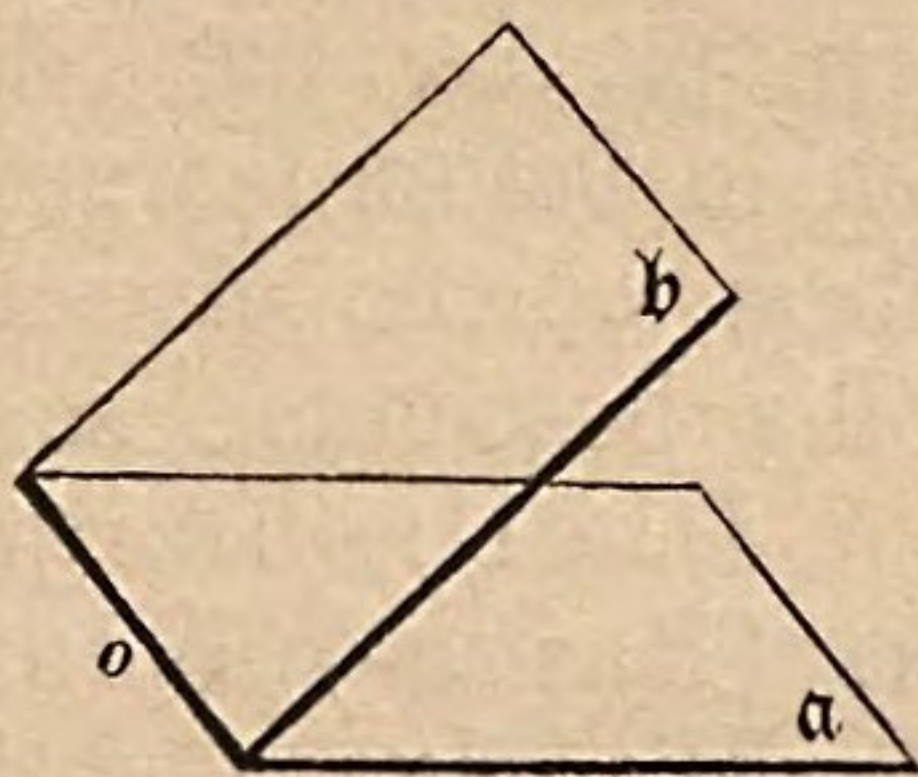
Man lege durch  $b$  und einen beliebigen Punkt  $A$  der Geraden  $a$  eine Ebene, ziehe in derselben durch  $A$   $c \parallel b$ , und lege die Ebene  $\alpha c$ . Diese ist die gesuchte.

Anm. Hierdurch ist auch die Aufgabe erledigt: Durch zwei windschiefe Geraden die parallelen Ebenen zu legen. Man löst erst Aufgabe 2, dann Aufgabe 1, wobei man die Gerade  $b$  durch einen beliebigen ihrer Punkte ersetzt.

## 2) Seitenänderung der Ebene. — Der Raumwinkel.

10. *Drehung*. — Ist eine Ebene  $\alpha$  durch Aenderung ihrer Seite (ohne ihre Lage und Richtung zu ändern) in  $\beta$  übergegangen, so giebt es jedenfalls eine einzige Gerade auf ihr, welche an der Bewegung nicht teilnahm, die also  $\beta$  mit  $\alpha$  gemeinsam hat. — Denn gäbe es keine solche Gerade, so hätten beide Ebenen nicht dieselbe Lage und Richtung; gäbe es aber darin mehr als eine, so wären beide Ebenen in derselben Weise bestimmt (nach 1); also könnte keine Seitenänderung stattgefunden haben. — Wir nennen diese Art der Bewegung einer Ebene *Drehung*, die ruhende Gerade  $o$  die *Drehungsaxe* (*Axe*), und sagen,  $\alpha$  habe sich um  $o$  bis  $\beta$  gedreht.

Fig. 6.



Drehung einer Ebene ist also Aenderung ihrer Seite mit Beibehaltung ihrer Lage und Richtung. Von zwei Ebenen mit verschiedener Seite aber derselben Lage und Richtung sagt man, sie schneiden sich.

Zwei sich schneidende Ebenen entstehen, wenn zwei zusammenfallende Geraden  $o$  sich nach verschiedenen Seiten bewegen.

Zwei Ebenen können sich nur in *einer* Geraden schneiden. Denn nach 1 müssen zwei Ebenen, die zwei Geraden gemeinsam haben, zusammenfallen.

Eine Ebene  $\alpha$  kann nur auf eine Art in  $\beta$  übergehen und beschreibt dabei einen Teil des Raumes.



29a. Schneidet eine Ebene eine von zwei parallelen Ebenen, so schneidet sie auch die andere.

**11. Beziehungen zwischen zwei Ebenen.** — Verschiebung und Drehung sind hiernach zwei verschiedene Arten einfacher Bewegung, die von einer Ebene ausgeführt werden können. \*)

Aus den obigen Betrachtungen geht hervor, dass allgemein die Gesetze gelten:

Zwei Ebenen mit derselben Lage und Richtung haben stets ungleiche Seite (und umgekehrt).

Zwei Ebenen mit gleicher Seite haben stets verschiedene Lage und Richtung (und umgekehrt).

Anm. Zwei Ebenen, die sich durch Lage, Richtung und Seite unterscheiden, sind im Raume nicht möglich. Sollte eine Ebene durch zwei aufeinanderfolgende Bewegungen einmal Lage und Richtung und sodann die Seite ändern, so müsste sie bei der zweiten Bewegung (wenn sie nicht mit der ursprünglichen Ebene wieder dieselbe Lage und Richtung erhalten sollte) aus dem Raume heraustreten, was nicht denkbar ist. (Vgl. T. II, Nr. 30.)

Zwei parallele Ebenen teilen den Raum in drei, zwei sich schneidende in vier unvollständig begrenzte Teile.

### Der Raumwinkel zweier Ebenen.

**12. Definition des Raumwinkels zweier Ebenen.** — Die Grösse der Drehung einer Ebene kann ebensowenig wie diejenige einer Geraden unmittelbar durch ein Gebilde veranschaulicht werden. (Vgl. T. II, Nr. 31.) Sind ferner zwei sich schneidende Ebenen gegeben, so muss, ähnlich wie dort, auf jeder Ebene eine ihrer beiden Seiten festgesetzt werden, damit die Grösse der Drehung, durch welche eine Ebene die Seite der andern annimmt, eine völlig bestimmte sei.

Die Drehungsgrösse zwischen zwei Ebenen heisst ihr (Raum-) Winkel.

Die Axe der beiden Ebenen heisst Scheitellinie des Winkels, die Ebenen selbst, von der Scheitellinie an gerechnet, heissen Schenkelebenen des Winkels.

Anm. Eine Schenkelebene des Winkels beschreibt bei ihrer Drehung einen Teil des Raumes, der von den beiden Schenkelebenen unvollständig begrenzt wird. — Unter der Lage eines Raumwinkels versteht man die Lage dieses von seinen Schenkelebenen eingeschlossenen Raumstückes. — Hinsichtlich der doppelten Bedeutung des Raumwinkels gilt dasselbe wie beim Winkel in der Ebene. (S. T. II, Anm. in Nr. 32.)

---

\*) Wie die Verschiebung als specieller Fall der Drehung betrachtet werden kann, wird später gezeigt werden (Nr. 26).



Da die Drehungsgrösse zwischen zwei Ebenen sich, wie in Nr. 17 gezeigt werden wird, durch einen ebenen Winkel darstellen lässt, so reducieren sich alle weiteren Untersuchungen über Raumwinkel auf diejenigen über ebene Winkel (T. II, Nr. 33, 34, 37—40, 45 ff.). Umgekehrt geht aus jedem Satze, welcher die Winkel und Seitenlinien einer ebenen Figur betrifft, ein Satz über Raumwinkel und Ebenen hervor, wenn man die Ebene jener Figur einer einfachen Verschiebung unterwirft.

Wie eine Gerade in der Ebene, so kann sich auch eine Ebene im Raume nach zwei entgegengesetzten Seiten drehen. Wir können daher dem Raume zwei entgegengesetzte Seiten zuschreiben. Wie man von einem Punkte einer Ebene sagen kann, er liege diesseits oder jenseits einer in der Ebene gezogenen Geraden, und von einem Punkte des Raumes, er liege oberhalb oder unterhalb einer im Raume gelegten Ebene, so könnte man auch von einem Punkte, welcher in einem vierdimensionalen Gebiete läge, sagen, er liege innerhalb oder ausserhalb des in jenem Gebiete befindlichen Raumes. Wir vermögen aber ebensowenig uns ein solches Gebiet vorzustellen, wie die Lage eines Punktes ausserhalb des Raumes. — Aber aus der Möglichkeit, dass jede Ebene sich nach zwei entgegengesetzten Seiten drehen kann, folgt, dass von einer Ebene aus im Raume jede Konstruktion auf zwei entgegengesetzte Arten so ausgeführt werden kann, dass die konstruierten Gebilde gleiche Grösse und Gestalt haben (vgl. T. II, Nr. 42).

Gleiche Konstruktionen von einer (oder verschiedenen) Ebenen aus nach entgegengesetzten Seiten <sup>29a.</sup> geben gleiche aber entgegengesetzte (symmetrische) Resultate.

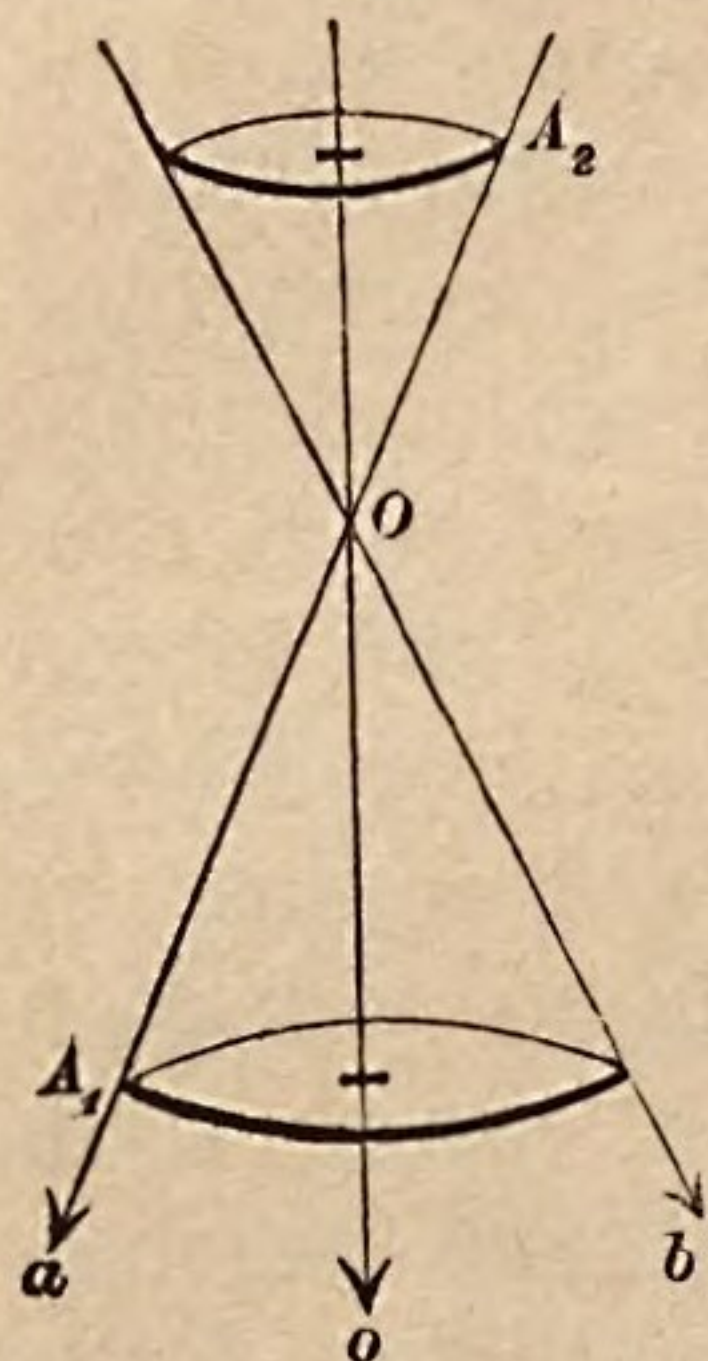
Anm. Zwei symmetrische Gebilde der Ebene kann man dadurch zur Deckung (Kongruenz) bringen, dass man das eine von der entgegengesetzten Seite der Ebene aus betrachtet (ihm die entgegengesetzte Seite giebt). Was wäre hiernach erforderlich, um zwei symmetrische Gebilde des Raumes zur Deckung (Kongruenz) zu bringen?

**13. Bewegung einer in der Ebene liegenden Geraden.** — *Vorbemerkung.* — Dreht eine Ebene sich um eine in ihr liegende Gerade  $o$ , so beschreibt jede in ihr liegende Gerade  $a$  eine Fläche. Die Gestalt dieser Fläche ist aber eine verschiedene, jenachdem sich  $a$  zu  $o$  in schiefer, paralleler oder senkrechter Richtung befindet. Da die beiden letzteren Richtungen als specielle Arten der ersteren angesehen werden können, so sind auch die in den beiden letzten Fällen entstehenden Flächen specielle Arten der im ersten Falle entstehenden.



14. a) *Die Gerade  $a$  in schiefer Richtung zur Axe.* — *Resultat der Drehung: Die gemeine Kegelfläche.* — Macht eine Ebene um eine in ihr liegende Gerade  $o$  eine ganze Umdrehung, so beschreibt jede zur Axe  $o$  schief liegende Gerade  $a$  eine krumme Fläche, die man (gemeine) Kegelfläche nennt.

Fig. 7.



Anm. Angenommen, die Ebene des Papiers drehe sich in Fig. 7 um die Axe  $o$ , so beschreiben zwei auf  $a$  beliebig angenommene Punkte  $A_1$  und  $A_2$  Kreislinien, die auf der von  $a$  beschriebenen Kegelfläche liegen und in der Figur die Gestalt derselben andeuten. — Da die sich drehende Ebene zum zweiten Male mit der Ebene des Papiers zusammenfällt, wenn sie eine halbe Umdrehung gemacht hat, so gerät auch die Gerade  $a$  noch einmal in die letztere Ebene. Die Kegelfläche wird also von der Ebene des Papiers in zwei Geraden,  $a$  und  $b$ , geschnitten.

Die auf verschiedenen Seiten von  $o$  liegenden Teile von  $a$  beschreiben zwei Teile der Kegelfläche, welche nur durch den Schnittpunkt von  $a$  und  $o$  zusammenhängen. Die vollständige Kegelfläche besteht also aus zwei getrennten Teilen. Da diese Teile jedoch offenbar ebenso unter einander kongruent sind, wie die durch  $a$  und  $o$  gebildeten Scheitelwinkel, so pflegt man nur einen dieser Teile zu betrachten und als Kegelfläche zu bezeichnen.

Die Gerade  $o$  heisst Axe, die Gerade  $a$  in allen ihren verschiedenen Richtungen Seitenlinie, der Schnittpunkt von  $a$  und  $o$  ( $O$ ) Spitze, jede durch die Axe gelegte Ebene (also die sich drehende Ebene in ihren verschiedenen Stellungen) Axenschnitt, endlich der Winkel zweier in demselben Axenschnitt liegenden Seitenlinien ( $ab$ ) Winkel an der Spitze der Kegelfläche.

Aus der Entstehungsweise der Kegelfläche folgen unmittelbar die Sätze:

30. Alle Seitenlinien einer Kegelfläche bilden mit der Axe gleiche Winkel.
31. Auf der Kegelfläche können durch ihre Spitze beliebige Geraden gezogen werden.

Da man durch je zwei Seitenlinien der Kegelfläche eine Ebene legen kann, welche durch ihre Spitze geht, so folgt umgekehrt:

32. Jede durch die Spitze einer Kegelfläche gelegte Ebene schneidet die Kegelfläche entweder gar nicht oder in zwei Seitenlinien.



Jede durch eine Seitenlinie der Kegelfläche gelegte Ebene schneidet die Kegelfläche nur noch in einer zweiten Seitenlinie (32). 33.

Da ferner jede Fläche, auf der man in jedem ihrer Punkte zwei gerade Linien ziehen kann, eine Ebene ist (Umk. z. 1), so folgt:

Auf der Kegelfläche kann man durch einen beliebigen ihrer Punkte (mit Ausnahme der Spitze) nur *eine* Gerade ziehen. — Alle auf der Kegelfläche gezogenen Geraden schneiden sich in der Spitze. 34.

Auf der Kegelfläche können ausser den Seitenlinien keine anderen geraden Linien gezogen werden. 35.

Anm. Ein Modell der Kegelfläche (begrenzt durch die von  $A_1$  beschriebene Kreislinie) liefert ein aus Papier geschnittener Kreissektor, dessen Ränder längs der Richtung der begrenzenden Radien zusammengeklebt werden.

Im allgemeinen versteht man unter Kegelfläche jede Fläche, die von einer Geraden beschrieben wird, welche sich im Raume beliebig um einen ihrer Punkte dreht. Eine von einem beliebigen anderen Punkte dieser Geraden beschriebene Linie heisst, weil sie zur näheren Bestimmung der Gestalt der Kegelfläche dient, Leitlinie der Kegelfläche. Die Leitlinie der gemeinen Kegelfläche ist eine Kreislinie. Hiernach ist die Ebene ein specieller Fall der gemeinen Kegelfläche (T. II, Nr. 29 und 35).

15. b) *Die Gerade  $a$  in paralleler Richtung zur Axe. — Resultat der Drehung: Die gemeine Cylinderfläche. — Macht eine Ebene um eine in ihr liegende Gerade  $o$*  36.

eine ganze Umdrehung, so beschreibt jede zur Axe  $o$  parallele Gerade  $a$  eine krumme Fläche, die man (gemeine) Cylinderfläche nennt.

Da die parallelen Geraden  $a$  und  $o$  als solche angesehen werden können, die sich in einem unendlich fernen Punkte schneiden (T. II, Nr. 58), so kann auch die Cylinderfläche als specieller Fall der Kegelfläche angesehen werden, d. h. als Kegelfläche, deren Spitze auf der Axe in unendliche Entfernung gerückt ist. Demnach folgt aus jeder Eigenschaft der Kegelfläche ohne weiteres eine entsprechende Eigenschaft der Cylinderfläche.

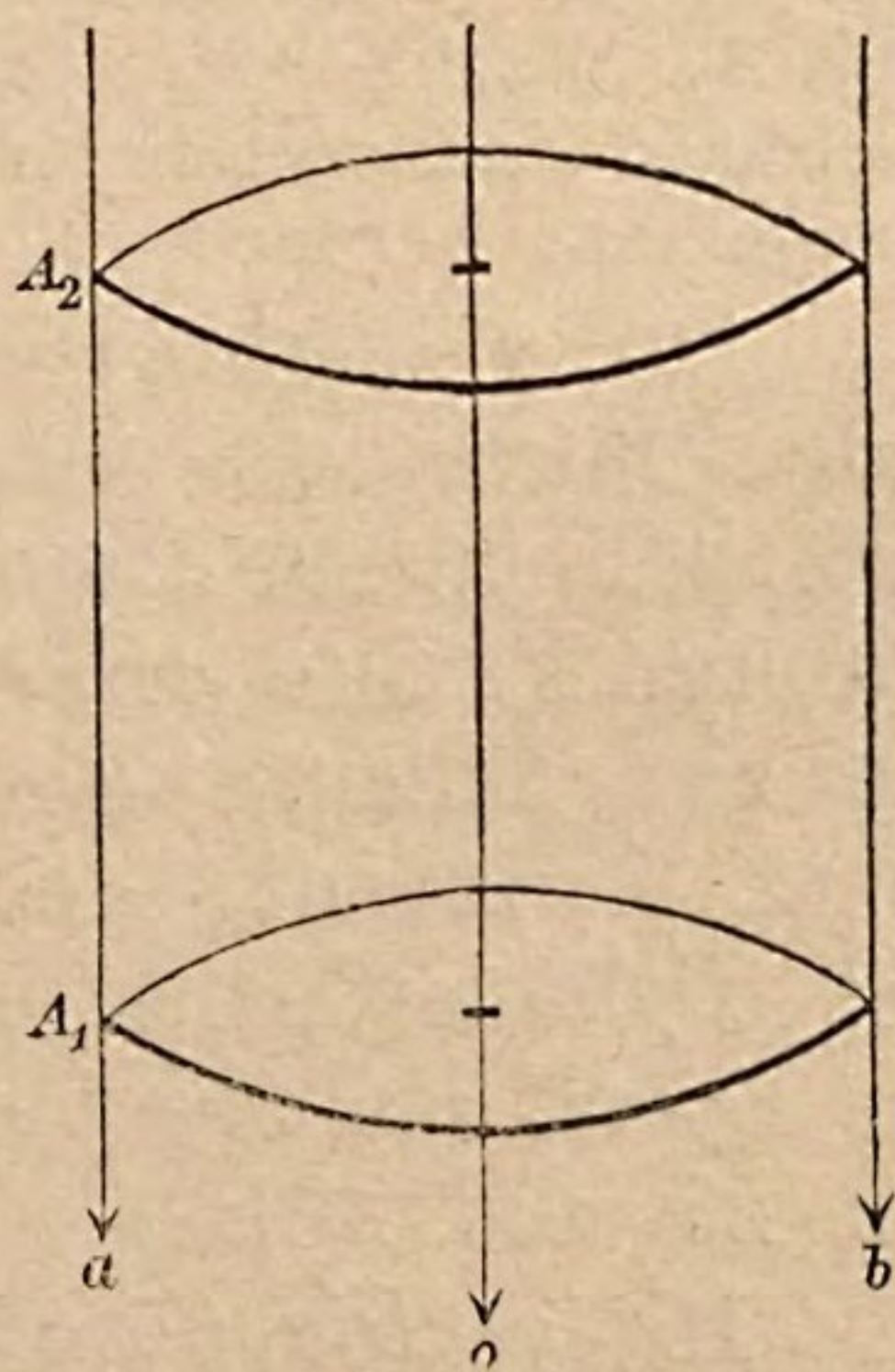


Fig. 8.



Anm. Angenommen, die Ebene des Papiers drehe sich in Fig. 8 um die Axe  $o$ , so beschreiben zwei auf  $a$  beliebig angenommene Punkte  $A_1$  und  $A_2$  Kreislinien, die auf der von  $a$  beschriebenen Cylinderfläche liegen und in der Figur die Gestalt derselben andeuten. — Die Cylinderfläche wird von der Ebene des Papiers in zwei Geraden,  $a$  und  $b$ , geschnitten. — Die Cylinderfläche entsteht auch durch Bewegung einer Kreislinie auf einer sich verschiebenden Ebene.

Die Gerade  $o$  heisst Axe, die Gerade  $a$  in allen ihren verschiedenen Lagen Seitenlinie, jede durch die Axe gelegte Ebene Axenschnitt der Cylinderfläche.

Aus den Sätzen 30—35 folgt:

36. Alle Seitenlinien einer Cylinderfläche sind der Axe parallel (30).
37. Auf der Cylinderfläche können beliebige der Axe parallele Geraden gezogen werden (31).
38. Jede mit der Axe einer Cylinderfläche parallel gelegte Ebene schneidet die Cylinderfläche entweder gar nicht oder in zwei Seitenlinien (32).
39. Jede durch eine Seitenlinie der Cylinderfläche gelegte Ebene schneidet die Cylinderfläche nur noch in einer zweiten Seitenlinie (33).
40. Auf der Cylinderfläche kann man durch einen beliebigen ihrer Punkte nur *eine* Gerade ziehen (34). — Alle auf der Cylinderfläche gezogenen Geraden sind einander parallel.
41. Auf der Cylinderfläche können ausser den Seitenlinien keine anderen geraden Linien gezogen werden (35).

Anm. Ein Modell der Cylinderfläche (begrenzt durch die von  $A_1$  und  $A_2$  beschriebenen Kreislinien) liefert ein aus Papier geschnittenes Rechteck, dessen Ränder längs der Richtung zweier Gegenseiten zusammengeklebt werden.

Im allgemeinen versteht man unter Cylinderfläche jede Fläche, die von einer Geraden beschrieben wird, welche sich beliebig im Raume verschiebt. Eine von einem beliebigen anderen Punkte dieser Geraden beschriebene Linie heisst, weil sie zur näheren Bestimmung der Gestalt der Cylinderfläche dient, Leitlinie der Cylinderfläche. Die Leitlinie der gemeinen Cylinderfläche ist eine Kreislinie. — Hiernach ist auch die Ebene ein specieller Fall der gemeinen Cylinderfläche (T. II, Nr. 27 und 28).

16. c) *Die Gerade  $a$  in senkrechter Richtung zur Axe.* — *Resultat der Drehung: Die Ebene.* — Nimmt man in Fig. 7 an, dass die Gerade  $a$  zur Axe  $o$  senkrecht stehe, so müssen, weil



Winkel  $(ao) = (bo)$  ist,  $b$  und  $a$  entgegengesetzte Richtung haben und in dieselbe Gerade fallen. Es kann also jeder Punkt dieser Geraden als Schnittpunkt von  $a$  und  $b$ , d. h. als Spitze der entstehenden Kegelfläche betrachtet werden. — Ferner steht die Gerade  $a$  während ihrer Bewegung beständig auf  $o$  senkrecht, und zu jeder ihrer Stellungen  $a_1$  giebt es eine entgegengesetzte Stellung  $b_1$ , in welche  $a_1$  gerät, nachdem die Ebene eine halbe Umdrehung gemacht hat. Und ebenso wie  $b$  mit  $a$ , fällt auch  $b_1$  mit  $a_1$  zusammen. — Demnach kann nicht nur jeder Punkt der Geraden  $a$  ( $b$ ), sondern jeder Punkt einer jeden Seitenlinie  $a_1$  ( $b_1$ ) als Spitze der entstehenden Kegelfläche betrachtet werden; d. h.: die in diesem Falle entstehende Kegelfläche hat die Eigenschaft, dass man auf ihr durch jeden ihrer Punkte beliebige Geraden ziehen kann (31). Nach der Umkehrung zu 1 muss also diese Kegelfläche eine Ebene sein.

Anm. Andere Ableitungen dieses Resultates: 1) Die Kegelfläche wird von jeder durch die Axe gehenden Ebene in zwei Geraden geschnitten (32). Sie wird nur in einer Geraden geschnitten, wenn die erzeugende Gerade auf der Axe senkrecht steht. Da nun zwei Ebenen sich stets nur in einer Geraden schneiden, so kann umgekehrt eine Fläche, die von allen (durch eine Gerade gehenden) Ebenen nur in einer Geraden geschnitten wird, selbst nur eine Ebene sein. Mit hin geht in diesem Falle die Kegelfläche in eine Ebene über.

2) Es sei in Fig. 9  $OO_1$  die Drehungsaxe, und  $O_1A$  und  $O_1B$  zwei beliebige Stellungen der auf der Axe senkrechten, die Kegelfläche erzeugenden Geraden. Legt man die Ebene  $AO_1B$  und zieht in derselben  $O_1C$  in beliebiger Richtung, so kann man durch einen beliebigen Punkt  $C$  der Geraden  $O_1C$  stets eine Gerade  $AB$  so ziehen, dass  $AC = CB$  ist (T. II, Aufgabe 143). Dann ist (nach T. II, 366)

$$\text{im Dreieck } \overline{OAB}: OA^2 + OB^2 = 2OC^2 + 2AC^2;$$

$$\text{im Dreieck } \overline{O_1AB}: O_1A^2 + O_1B^2 = 2O_1C^2 + 2AC^2;$$

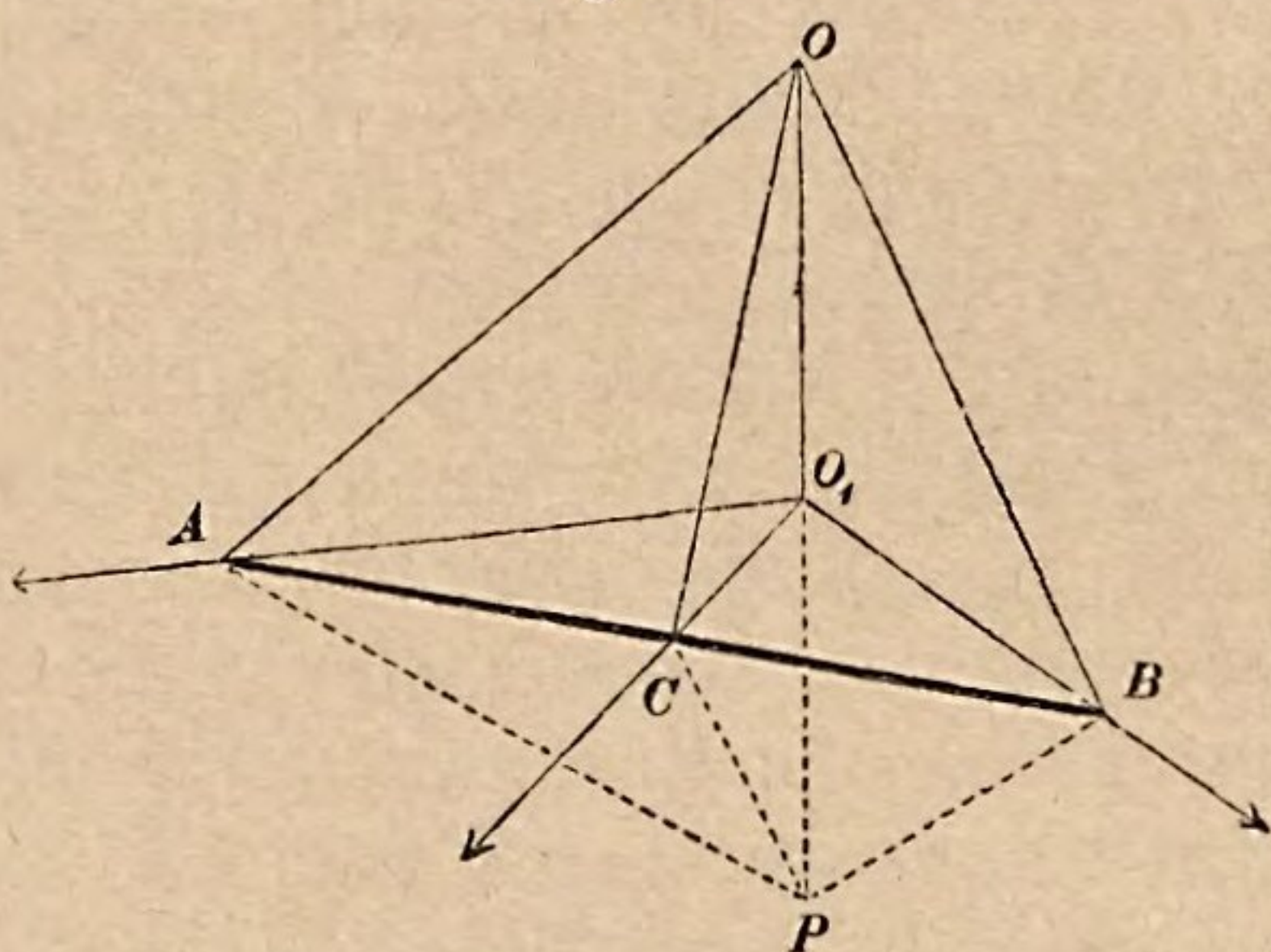
$$\text{subtrahiert: } OA^2 - O_1A^2 + OB^2 - O_1B^2 = 2(OC^2 - O_1C^2),$$

$$\text{oder nach T. II, 362: } OO_1^2 + OO_1^2 = 2(OC^2 - O_1C^2)$$

$$\text{oder: } OO_1^2 = OC^2 - O_1C^2;$$

d. h.: Das Dreieck  $\overline{OO_1C}$  ist rechtwinklig, oder  $O_1C \perp OO_1$ . Hieraus folgt aber, dass alle auf  $OO_1$  in  $O_1$  senkrecht stehenden Geraden in der durch  $O_1A$  und  $O_1B$  bestimmten Ebene liegen, dass also  $O_1A$  diese Ebene beschreibt.

Fig. 9.





3) Man verlängere in Fig. 9  $OO_1$  über  $O_1$  hinaus um sich selbst bis  $P$ . Dann ist

$\overline{OAO_1} \cong \overline{PAO_1}$ ;  $\overline{OBO_1} \cong \overline{PBO_1}$ ;  $\overline{OAB} \cong \overline{PAB}$ ;  $\overline{OAC} \cong \overline{PAC}$ ;  $\overline{OCO_1} \cong \overline{PCO_1}$ ; folglich:

$$OA = PA; \quad OB = PB; \quad OAC = PAC; \quad OC = PC; \quad OO_1C = PO_1C.$$

Da aber  $OO_1C$  und  $PO_1C$  Nebenwinkel und einander gleich sind, so sind sie gleich  $R$ ; d. h.:  $O_1C \perp OO_1$ .

42. Folgerungen: Dreht sich ein rechter Winkel um einen seiner Schenkel, so beschreibt der andere eine Ebene.

Da diese Ebene durch zwei Richtungen des sich drehenden Schenkels bestimmt ist (1), so folgt weiter:

43. Steht eine Gerade auf zwei Geraden in deren Schnittpunkte senkrecht, so steht sie auf jeder in der Ebene der beiden Geraden durch ihren Schnittpunkt gezogenen Geraden senkrecht.

44. Alle Geraden, die auf einer Geraden in demselben Punkte senkrecht stehen, liegen in einer Ebene.

**17. Zurückführung des Raumwinkels auf einen ebenen Winkel.** — Macht eine Ebene um eine in ihr liegende Gerade  $o$  eine halbe Umdrehung, so ist, wie eben gezeigt, unter allen durch irgend einen Punkt der Linie  $o$  gezogenen Geraden die auf  $o$  senkrechte ( $c$ ) die einzige, welche einen ebenen Winkel beschreibt. Da dieser Winkel ein gestreckter ist, so hat die Senkrechte ebenso wie die Ebene eine halbe Umdrehung gemacht. Da ferner die Gerade  $c$  und die Ebene ein und dieselbe Bewegung ausführen, so vollenden beide auch den  $n^{\text{ten}}$  Teil einer halben Umdrehung durch dieselbe Bewegung; d. h.: Für jede Drehung der Ebene ist die Drehungsgrösse von  $c$  derjenigen der Ebene gleich. Demnach kann die Drehung der Ebene durch diejenige von  $c$  gemessen werden, und da die Lage von  $c$  beliebig ist, so hat man den Satz:

45. Die Drehung einer Ebene ist eben so gross als diejenige einer beliebigen, auf der Axe senkrechten Geraden in der Ebene.

Der Raumwinkel zweier Ebenen wird hiernach als ebener Winkel konstruiert, indem man in beiden Ebenen auf der Axe in einem beliebigen ihrer Punkte Senkrechten errichtet. Ein derartig konstruierter Winkel heisst Neigungswinkel der beiden Ebenen.

46. Folgerungen: Alle Neigungswinkel zweier Ebenen sind einander gleich (23).



Alle Neigungswinkel zweier Ebenen liegen in 47. parallelen Ebenen (23).

Da jede zur Axe schief stehende Gerade  $a$  (Fig. 7) nach einer halben Umdrehung der Ebene mit ihrer neuen Richtung  $b$  einen spitzen Winkel bildet, so beschreibt sie auch, wenn die Ebene den  $n^{\text{ten}}$  Teil einer Umdrehung macht, einen kleineren Winkel als eine zur Axe senkrechte Gerade, d. h.:

Unter allen Geraden einer sich drehenden Ebene 48. beschreibt eine zur Axe senkrechte den grössten Winkel; zwei Geraden, welche gleiche Winkel mit der Axe bilden, beschreiben gleiche Winkel; von zwei Geraden, welche ungleiche Winkel mit der Axe bilden, beschreibt diejenige, welche den kleineren Winkel mit der Axe bildet, den kleineren Winkel.

Anm. Hierbei ist unter dem Winkel, welchen die Gerade beschreibt, nur der Unterschied zwischen ihrer Anfangs- und Endrichtung verstanden. Die wirkliche Drehungsgrösse der Geraden wird aber durch diesen Winkel nur dann ausgedrückt, wenn die Gerade zur Axe senkrecht steht, weil die Gerade nur in diesem Falle eine Ebene beschreibt. In allen anderen Fällen ist der Winkel zweier Geraden im Raume kleiner als die Drehungsgrösse zwischen ihnen.

Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter, so sagt man, dass die Ebenen auf einander senkrecht stehen.

18. *Die Gerade in senkrechter Richtung zur Ebene.* — Wenn eine Gerade eine Ebene so schneidet, dass sie auf allen, durch ihren Schnittpunkt mit der Ebene in dieser gezogenen Geraden senkrecht steht, so sagt man, sie stehe auf der Ebene senkrecht. — Aus 43 folgt nun:

Steht eine Gerade ( $a$ ) auf zwei Geraden ( $b, c$ ) senkrecht, die durch ihren Schnittpunkt mit einer Ebene ( $\alpha$ ) in dieser gezogen sind, so steht sie auf der Ebene senkrecht (Fig. 10).

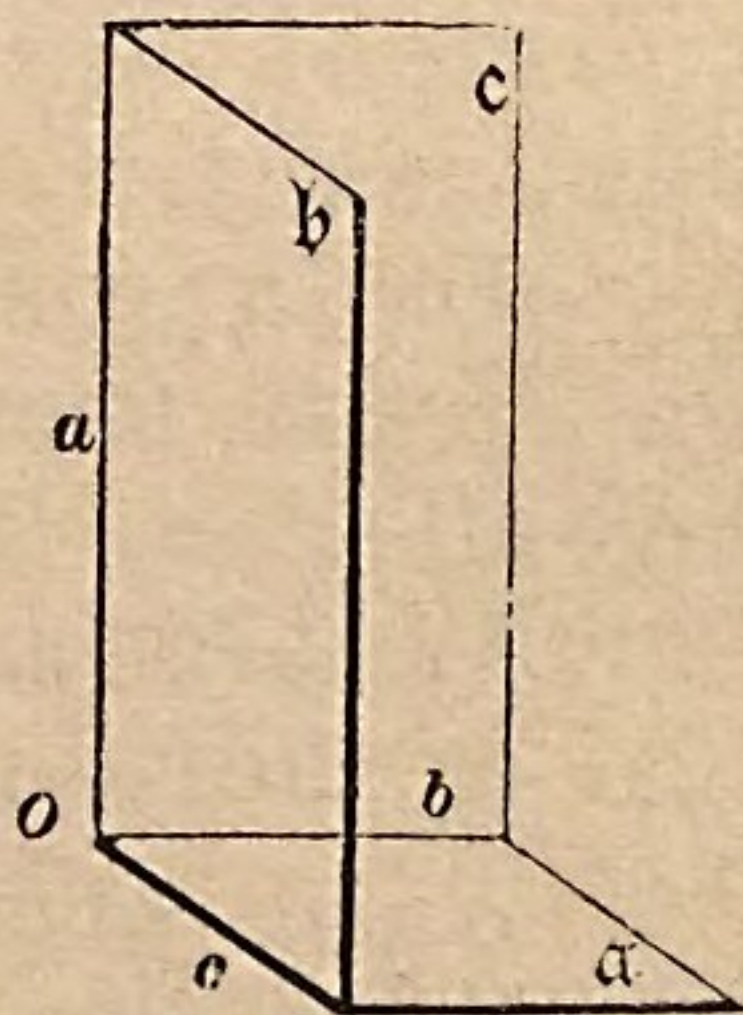
Umgekehrt: Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht sie auf jeder durch ihren Schnittpunkt mit der Ebene in dieser gezogenen Geraden senkrecht.

Da  $a$  auf  $b$  und  $c$  senkrecht steht, so ist  $(bc)$  der Neigungswinkel der Ebenen  $b$  und  $c$ . Aus 49 folgt also:

Die Ebene des Neigungswinkels zweier Ebenen 51. steht auf jeder der beiden Ebenen senkrecht.

Fig. 10.

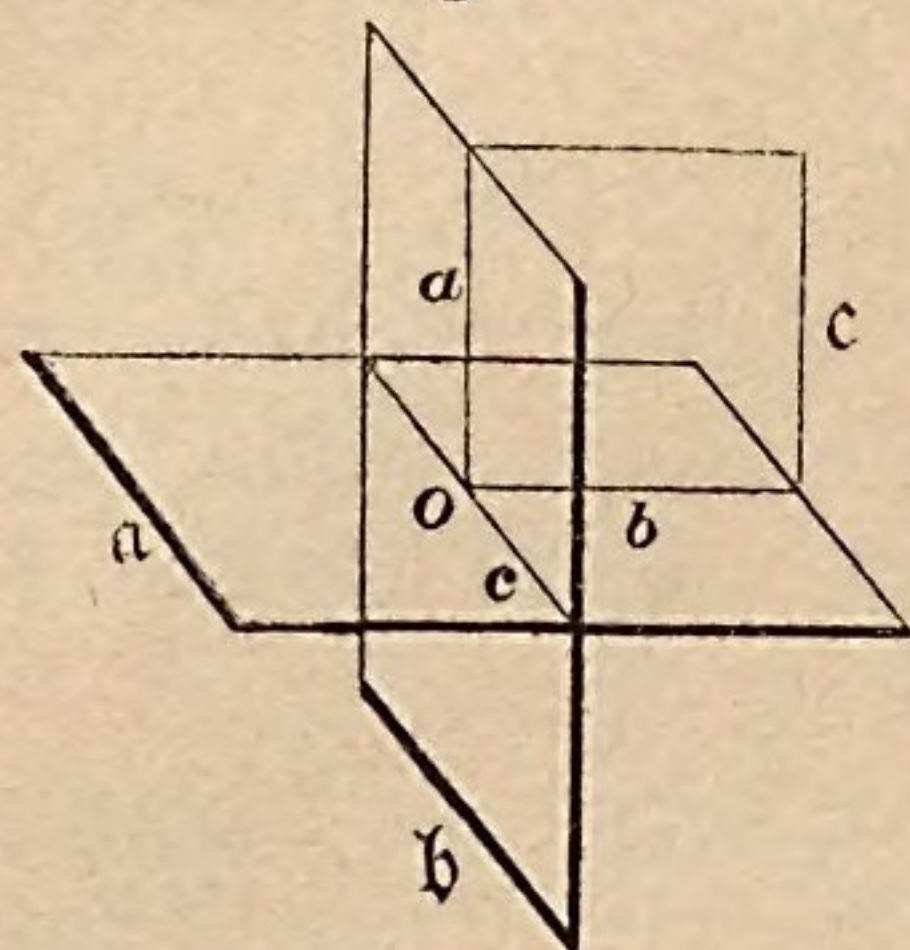
49.



50.



Fig. 11.



Legt man durch  $a$  (Fig. 11) eine beliebige Ebene  $b$ , welche die Ebene  $a$  in  $c$  schneidet und errichtet in  $a$  die Gerade  $b$  senkrecht auf  $c$ , so steht  $a$  auf  $c$  (nach 50) und  $b$  auf  $c$  senkrecht; mithin ist  $(ab)$  der Neigungswinkel von  $a$  und  $b$ , und da derselbe nach 50 ein Rechter ist, so steht  $b$  auf  $a$  senkrecht; d. h.:

52. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht jede durch die Gerade gelegte Ebene auf der ersten Ebene senkrecht.

53. Umkehrungen von 52: Stehen zwei Ebenen senkrecht zu einander, so steht jede Gerade, welche man in einer von ihnen senkrecht zur Axe errichtet oder fällt, senkrecht zur andern.

54. Stehen zwei Ebenen senkrecht zu einander, und errichtet man in einem Punkte der Axe eine Senkrechte auf der ersten Ebene, so liegt diese Senkrechte in der zweiten Ebene.

55. Stehen zwei Ebenen senkrecht zu einander, und fällt man von einem Punkte der zweiten Ebene eine Senkrechte auf die erste, so liegt diese Senkrechte in der zweiten Ebene.

Stehen zwei Ebenen  $b$  und  $c$  (Fig. 10) auf einer dritten  $a$  senkrecht, und errichtet man im Schnittpunkte der beiden Axen  $b$  und  $c$  auf  $a$  die Senkrechte  $a$ , so liegt dieselbe nach 54 sowohl in  $b$  wie in  $c$ , ist also Schnittlinie beider Ebenen. Daraus folgt als weitere Umkehrung zu 52:

56. Stehen zwei Ebenen zu einer dritten senkrecht, so steht auch ihre Schnittlinie zur dritten Ebene senkrecht.

Da in jeder Ebene  $c$ , die man durch  $a$  legen kann (Fig. 10), im Punkte  $O$  sich nur eine Senkrechte auf  $b$  errichten lässt, und alle diese Senkrechten nach 50 in  $a$  zusammenfallen, so folgt:

57. In einem Punkte ( $O$ ) einer Ebene ( $a$ ) lässt sich auf derselben nur *eine* Senkrechte ( $a$ ) errichten.

Anm. Anderer Beweis für 57: Eine zweite Senkrechte  $a_1$  würde mit  $a$  zusammen eine Ebene  $c$  bestimmen, in welcher nach 50 sowohl  $a$  wie  $a_1$  auf  $b$  senkrecht stehen müssten.

58. Von einem ausserhalb einer Ebene liegenden Punkte lässt sich auf dieselbe nur *eine* Senkrechte fallen (55, 50).



Anm. Andrer Beweis für 58 ähnlich wie für 57.

Hiernach ist durch die Seite einer Ebene die Richtung einer auf ihr senkrechten Geraden vollkommen bestimmt. Daraus folgt weiter:

Zwei Geraden, die auf derselben Ebene senkrecht stehen, sind parallel. 59.

Umgekehrt: Steht eine von zwei parallelen Geraden auf einer Ebene senkrecht, so steht auch die andere auf ihr senkrecht. 59a.

Nach 42 ist durch eine Gerade die in einem ihrer Punkte senkrecht stehende Ebene vollkommen bestimmt. Folglich:

Durch einen Punkt einer Geraden lässt sich nur eine zu der Geraden senkrechte Ebene legen. 60.

Anm. Andrer Beweis für 60: Eine Gerade  $c$  kann nicht auf zwei sich schneidenden Ebenen  $c$  und  $c_1$  gleichzeitig senkrecht stehen. Denn legt man durch die Gerade eine beliebige, die Axe schneidende Ebene, welche  $c$  in  $b$  und  $c_1$  in  $b_1$  schneidet, so müsste in dieser Ebene  $c$  auf den sich schneidenden Geraden  $b$  und  $b_1$  zugleich senkrecht stehen.

Hiernach ist durch die Richtung einer Geraden die Seite einer auf ihr senkrechten Ebene vollkommen bestimmt. Daraus folgt weiter:

Zwei Ebenen, die auf derselben Geraden senkrecht stehen, sind parallel. 61.

Umgekehrt: Steht eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht. 61a.

Aus 51 folgt die Lösung der

Aufgabe 3. — Durch eine in der Ebene  $a$  gegebene Gerade  $b$  die zu  $a$  senkrechte Ebene  $c$  zu legen (Fig. 12).

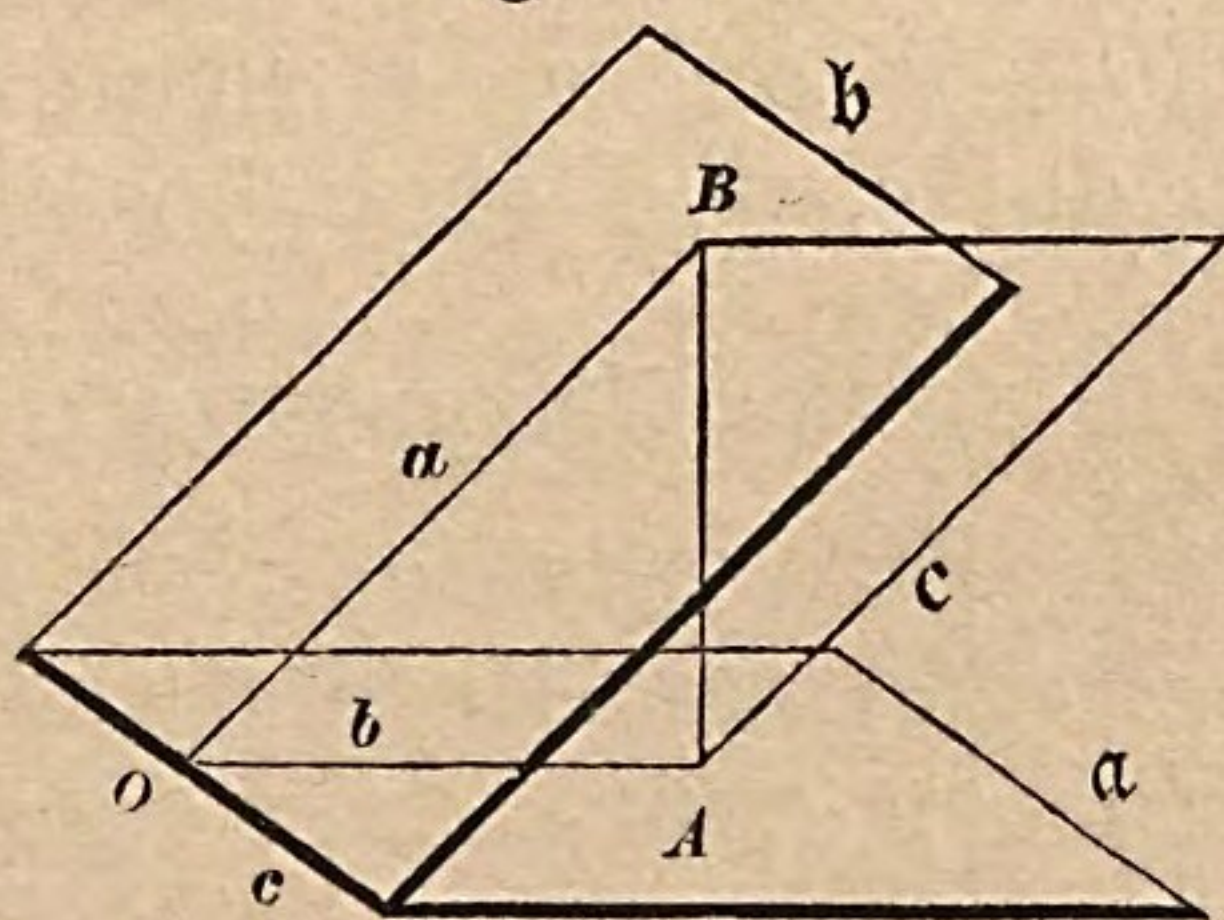
Man errichte in  $a$  die Gerade  $c$  senkrecht auf  $b$ , lege durch  $c$  die Ebene  $b$  beliebig, errichte in  $b$  im Punkte  $O$  die Gerade  $a$  senkrecht auf  $c$ , und lege die Ebene  $ab = c$ . Diese ist die gesuchte.

Ferner folgt aus 53 die Lösung der

Aufgabe 4. — In einem in der Ebene  $a$  gegebenen Punkte  $A$  die zu  $a$  senkrechte Gerade zu errichten.

Man ziehe durch  $A$  in der Ebene  $a$  die Gerade  $b$  beliebig, konstruiere nach Aufg. 3 die Ebene  $c$  und errichte in  $c$  auf  $b$  im Punkte  $A$  die Senkrechte  $AB$ . Diese ist die gesuchte.

Fig. 12.





Aufgabe 5. — Aus einem ausserhalb der Ebene  $\alpha$  gegebenen Punkte  $B$  die zu  $\alpha$  senkrechte Gerade zu fällen.

Man lege durch  $B$  die Ebene  $\beta$  beliebig, fälle in  $\beta$  die Gerade  $a$  senkrecht auf  $c$ , errichte in  $\alpha$  die Gerade  $b$  senkrecht auf  $c$ , lege die Ebene  $ab = c$ , und fälle in  $c$  aus  $B$  auf  $b$  die Senkrechte  $BA$ . Diese ist die gesuchte nach 53.

Aufgabe 6. — Durch eine ausserhalb der Ebene  $\alpha$  gegebene Gerade  $a$  die zu  $\alpha$  senkrechte Ebene  $c$  zu legen.

Man nehme in  $\alpha$  den Punkt  $B$  beliebig an, fälle nach Aufgabe 5 die auf  $\alpha$  senkrechte Gerade  $BA$  und lege durch  $BA$  und  $a$  die Ebene  $c$ . Diese ist die gesuchte nach 52.

Anm. Es ist gleichgültig, ob  $a$  und  $\alpha$  sich schneiden oder parallel sind. — Mittelst 59 kann Aufgabe 4 durch Aufgabe 5 oder auch umgekehrt gelöst werden.

Aus 49 folgt die Lösung der

Aufgabe 7. — Durch einen auf der Geraden  $c$  gegebenen Punkt  $O$  die zu  $c$  senkrechte Ebene  $c$  zu legen.

Man lege durch  $c$  die Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  beliebig, errichte in  $O$  auf  $c$  in der Ebene  $\alpha$  die Senkrechte  $b$ , in der Ebene  $\beta$  die Senkrechte  $a$ , und lege die Ebene  $ab = c$ . Diese ist die gesuchte.

Aufgabe 8. — Durch einen ausserhalb der Geraden  $c$  gegebenen Punkt  $B$  die zu  $c$  senkrechte Ebene  $c$  zu legen.

Man lege durch  $B$  und  $c$  die Ebene  $\beta$ , ferner durch  $c$  die Ebene  $\alpha$  beliebig, fälle aus  $B$  in der Ebene  $\beta$  die Senkrechte  $BO = a$  auf  $c$ , errichte in  $O$  in der Ebene  $\alpha$  die Senkrechte  $b$  auf  $c$ , und lege die Ebene  $ab = c$ . Diese ist die gesuchte.

#### Der Neigungswinkel einer Geraden und einer Ebene.

19. *Definition und Eigenschaften des Neigungswinkels einer Geraden und einer Ebene.* — Der Neigungswinkel  $(ab)$  zweier Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  wird gleichzeitig Neigungswinkel der Geraden  $a$  gegen die Ebene  $\beta$  und Neigungswinkel der Geraden  $b$  gegen die Ebene  $\alpha$  genannt.

Ist der Neigungswinkel der beiden Ebenen ein rechter, so steht die Gerade  $a$  auf der Ebene  $\beta$  senkrecht. (Denn sie steht auf  $b$  und auf der Axe der beiden Ebenen senkrecht, folglich nach 49 auf der Ebene  $\beta$ .)

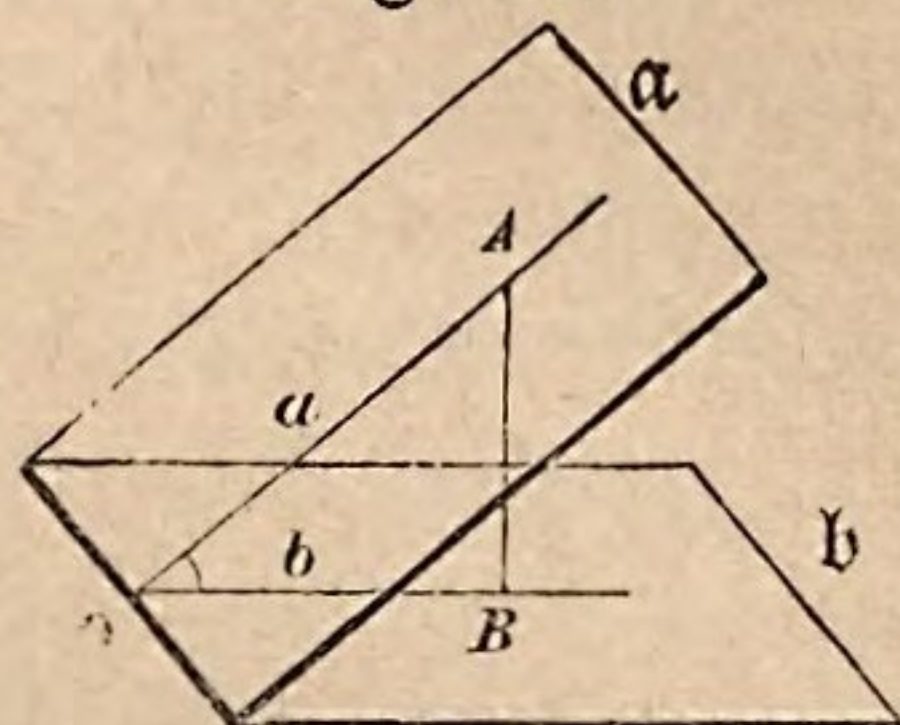


Der zweite Schenkel  $b$  des Neigungswinkels der Geraden  $a$  gegen die Ebene  $\flat$  heisst der Neigungsschenkel der Geraden  $a$ .

Steht  $a$  auf  $\flat$  senkrecht, so wird die Richtung des Neigungsschenkels beliebig, weil alsdann jede durch den Fusspunkt von  $a$  in  $\flat$  gezogene Gerade durch Drehung um  $R$  in die Richtung  $a$  kommen kann.

Da nach 51 die Ebene  $ab$  auf  $\flat$  senkrecht steht, so liegt nach 55 jede aus einem Punkte der Geraden  $a$  auf die Ebene  $\flat$  gefällte Senkrechte in der Ebene  $ab$ ; also:

Fig. 13.

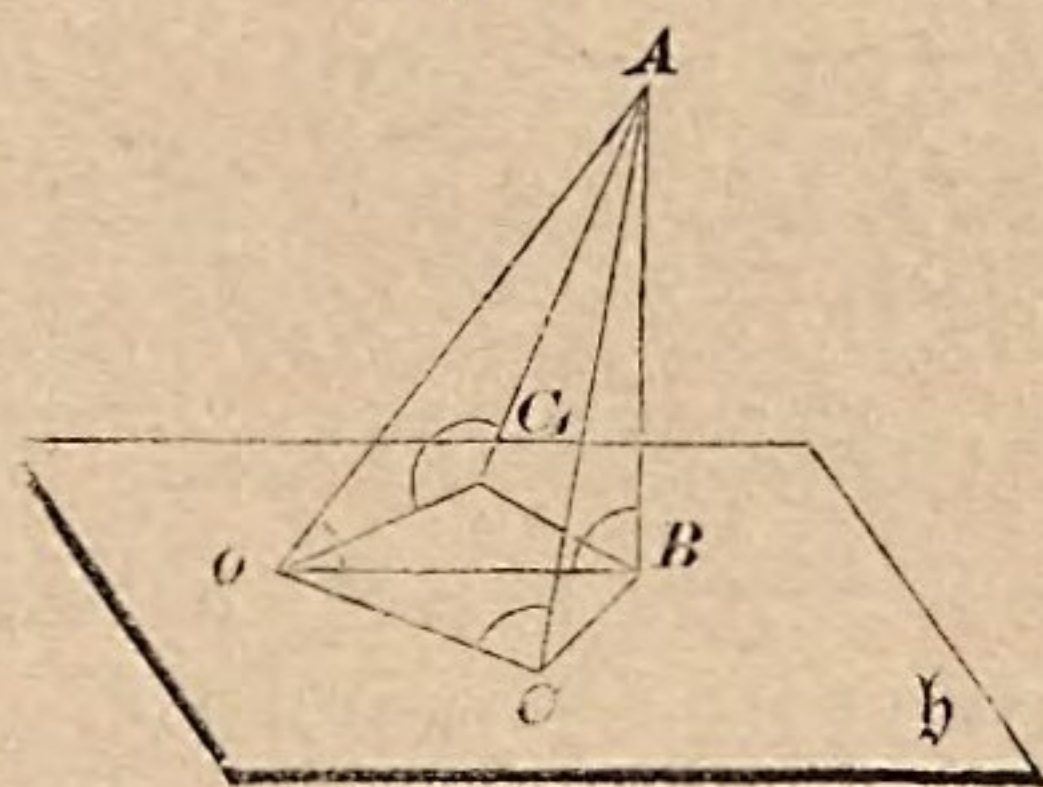


Steht eine Gerade schief zu einer Ebene, so liegen alle aus Punkten der Geraden auf die Ebene gefällten Senkrechten in der Ebene des Neigungswinkels, und die Fusspunkte dieser Senkrechten auf dem Neigungsschenkel. 62.

Anm. Da der Neigungsschenkel durch den Schnittpunkt der Geraden  $a$  mit der Ebene  $\flat$  und durch einen beliebigen jener Fusspunkte bestimmt ist, so folgt aus 62 die Konstruktion des Neigungswinkels der Geraden  $a$  gegen die Ebene  $\flat$ .

Zieht man durch den Schnittpunkt  $O$  einer Geraden  $OA$  und einer Ebene  $\flat$  in dieser letzteren ausser dem Neigungsschenkel  $OB$  noch eine beliebige Gerade  $OC$ , legt die Ebene  $AOC$ , fällt in derselben  $AC \perp OC$  und legt die Ebene  $ABC$ , so ist  $ABC = R$  (50),  $AC > AB$  (T. II, 108) und  $AOC > AOB$  (T. II, 175). Folglich:

Fig. 14.



Unter allen Winkeln, welche eine zu einer Ebene schief stehende Gerade mit den durch ihren Schnittpunkt in der Ebene gezogenen Geraden bildet, ist der Neigungswinkel der kleinste. 63.

Zieht man ferner in der Ebene  $\flat$  die Gerade  $OC_1$  so, dass  $BOC_1 = BOC$  ist, macht  $OC_1 = OC$  und legt die Ebene  $AOC_1$ , so folgt (29a) aus der Symmetrie der Konstruktionen zur Ebene  $AOB$  (oder aus der Kongruenz der Dreiecke  $\overline{BOC}$  und  $\overline{BOC_1}$ ,  $\overline{ABC}$  und  $\overline{ABC_1}$ ,  $\overline{AOC}$  und  $\overline{AOC_1}$ ), dass  $AOC = AOC_1$ . Folglich:

Bildet der Neigungsschenkel einer schiefen Geraden gleiche Winkel mit zwei durch ihren Schnittpunkt mit einer Ebene in dieser gezogenen Geraden, 64.



so bildet auch die schiefe Gerade gleiche Winkel mit den letzteren (und umgekehrt).

Ist  $BOC = BOC_1 = R$ , so ist  $C_1OC$  eine Gerade, und die Ebenen  $AOC$  und  $AOC_1$  fallen in eine Ebene zusammen. Es sind also  $AOC$  und  $AOC_1$  Nebenwinkel, und, da sie nach 64 einander gleich sind, beide gleich  $R$ ; d. h.:

65. Steht der Neigungsschenkel einer schiefen Geraden senkrecht auf einer durch ihren Schnittpunkt mit einer Ebene in dieser gezogenen Geraden, so steht auch die schiefe Gerade auf der letzteren senkrecht (und umgekehrt).

Anm. Da  $AC \perp OC$ , so folgt aus 65, dass auch  $BC \perp OC$ . Dasselbe folgt, wenn man den Pythagoräischen Satz auf die Dreiecke  $\overline{AOB}$ ,  $\overline{AOC}$ ,  $\overline{ABC}$  anwendet.

Ist  $BOC > BOC_1$ , so liefert die Betrachtung der Dreiecke  $\overline{BOC}$  und  $\overline{BOC_1}$  (T. II, 123);  $\overline{ABC}$  und  $\overline{ABC_1}$  (T. II, 118);  $\overline{AOC}$  und  $\overline{AOC_1}$  (T. II, 123) das Resultat, dass  $AOC > AOC_1$ . Folglich:

66. Bildet der Neigungsschenkel einer schiefen Geraden ungleiche Winkel mit zwei durch ihren Schnittpunkt mit einer Ebene in dieser gezogenen Geraden, so bildet auch die schiefe Gerade in demselben Sinne ungleiche Winkel mit den letzteren (und umgekehrt).

Da der grösste Wert von  $BOC$   $2R$  ist, so folgt aus 66:

67. Unter allen Winkeln, welche eine zu einer Ebene schiefstehende Gerade mit den durch ihren Schnittpunkt in der Ebene gezogenen Geraden bildet, ist der Nebenwinkel des Neigungswinkels der grösste.

Da drei in der Ebene  $b$  von  $O$  ausgehende Geraden mit dem Neigungsschenkel  $OB$  nur dann gleiche Winkel bilden können, wenn die Richtung desselben beliebig wird, d. h. wenn  $AO$  auf  $b$  senkrecht steht, so folgt weiter:

68. Bildet eine Gerade gleiche Winkel mit drei durch ihren Schnittpunkt mit einer Ebene in dieser gezogenen Geraden, so steht sie auf der Ebene senkrecht.

20. *Entfernung.* — Da jede durch  $A$  gehende schiefe Gerade  $a$  mit der Senkrechten  $AB$  und dem Neigungsschenkel  $b$  ein rechtwinkliges Dreieck bildet, so folgt aus T. II, 108:

69. Unter allen Geraden, welche einen Punkt ausser-



halb einer Ebene mit Punkten der Ebene verbinden, ist die Senkrechte die kürzeste.

Die von einem Punkte  $A$  auf eine Ebene  $\beta$  gefällte Senkrechte  $AB$  heisst daher die Entfernung des Punktes  $A$  von der Ebene  $\beta$ . (Vgl. T. II, Nr. 74.)

Dreht sich das Dreieck  $\overline{AOB}$  um  $AB$ , so beschreibt  $O$  eine Kreislinie in der Ebene  $\beta$  (42) und  $OA$  eine Kegelfläche (Nr. 14). Also:

Von einem ausserhalb einer Ebene gelegenen 70. Punkte  $A$  kann man nach der Ebene  $\beta$  beliebig viele gleichlange Strecken ziehen, die auf einer Kegelfläche liegen, gegen die Ebene gleich geneigt sind, und deren Fusspunkte vom Fusspunkte der aus  $A$  auf die Ebene gefällten Senkrechten gleichen Abstand haben.

Alle Punkte einer Ebene, welche auf derselben 71. Kreislinie liegen, haben gleichen Abstand von einem Punkte der im Mittelpunkte dieser Kreislinie auf der Ebene errichteten Senkrechten.

Ferner folgt aus 70 und T. II, 117 und 118:

Sind von einem Punkte ausserhalb einer Ebene 72. zwei ungleiche Strecken nach Punkten der Ebene gezogen, so hat die längere Strecke den kleineren Neigungswinkel gegen die Ebene, aber ihr Fusspunkt den grösseren Abstand vom Fusspunkte der Senkrechten (und umgekehrt).

Ist in der Mitte einer Strecke  $AB$  eine Senkrechte errichtet, und wird diese Figur um  $AB$  gedreht, so beschreibt die Senkrechte eine auf  $AB$  senkrechte Ebene (42), und aus T. II, 120 folgt:

Der geometrische Ort eines Punktes, der von zwei 73. gegebenen Punkten gleichweit entfernt ist, ist die auf der Verbindungsstrecke beider Punkte in ihrer Mitte errichtete senkrechte Ebene.

Ferner folgt aus 70:

Der geometrische Ort eines Punktes, der von drei 74. gegebenen Punkten gleichweit entfernt ist, ist die auf der Ebene der drei Punkte im Mittelpunkte des durch dieselben bestimmten Kreises errichtete Senkrechte.

Konstruiert man nach 73 die drei geometrischen Oerter für den Punkt, der von  $A$  und  $B$ , von  $B$  und  $C$ , von  $C$  und  $A$



gleichweit entfernt ist, so müssen sich jene drei Ebenen nach 74 in der auf der Ebene  $ABC$  im Mittelpunkte des Umkreises von  $\overline{ABC}$  errichteten Senkrechten schneiden. Also:

75. Die in den Mitten der Verbindungsstrecken dreier Punkte  $A, B, C$  senkrecht errichteten Ebenen schneiden sich in derjenigen Geraden, welche im Mittelpunkte des Umkreises von  $\overline{ABC}$  auf der Ebene desselben senkrecht errichtet ist.

Verschieben sich zwei sich schneidende Geraden nebst den Halbierungslinien ihrer Winkel längs einer im Scheitel auf ihrer Ebene errichteten senkrechten Geraden, so beschreiben alle vier Geraden Ebenen, und aus T. II, 122 folgt:

76. Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von *zwei* gegebenen Ebenen gleichweit entfernt ist, ist das Ebenenpaar, welches die Winkel der gegebenen Ebenen halbiert.

Konstruiert man hiernach die beiden geometrischen Oerter für den Punkt, welcher von  $a$  und  $b$ , sowie von  $b$  und  $c$  gleichweit entfernt ist, so schneiden sich dieselben in vier Geraden, durch welche auch der geometrische Ort des Punktes gehen muss, welcher von  $a$  und  $c$  gleichweit entfernt ist. Also:

77. Die drei Ebenenpaare, welche die Winkel dreier Ebenen halbieren, schneiden sich in vier Geraden, welche den geometrischen Ort eines Punktes bilden, der von den *drei* Ebenen gleichweit entfernt ist.

**21. Neigungswinkel paralleler Geraden und Ebenen.** — Werden zwei parallele Geraden  $OA$  und  $O_1A_1$  von einer Ebene in  $O$  und  $O_1$  geschnitten, und sind  $AB$  und  $A_1B_1$  die aus  $A$  und  $A_1$  auf die Ebene gefällten Senkrechten, also  $OB$  und  $O_1B_1$  die Neigungsschenkel der Geraden, so ist  $OA \parallel O_1A_1$ ,  $AB \parallel A_1B_1$  (59), folglich  $OAB = O_1A_1B_1$  (23, Anm.),  $AOB = A_1OB_1$  (T. II, 78). Folglich:

78. Parallele Geraden haben mit derselben Ebene gleiche Neigungswinkel.

Anm. Gilt auch die Umkehrung dieses Satzes? — Ein spezieller Fall von 78 ist 59a.

Werden zwei parallele Ebenen  $\alpha$  und  $\alpha_1$  von einer Geraden in  $O$  und  $O_1$  geschnitten, und fällt man aus einem Punkte  $A$  der Geraden auf  $\alpha$  die Senkrechte  $AB$ , welche  $\alpha_1$  in  $B_1$  schneidet, so steht  $AB_1$  auf  $\alpha_1$  senkrecht (61a); folglich sind  $OB$  und



$O_1B_1$  die Neigungsschenkel der Geraden, und in der Ebene  $AB_1O_1$  ist  $AOB = AO_1B_1$  (T. II, 78). Folglich:

Parallele Ebenen haben mit derselben Geraden 79. gleiche Neigungswinkel.

Anm. Gilt auch die Umkehrung dieses Satzes? — Ein specieller Fall von 79 ist 61a.

**22. Bewegung einer in der Ebene liegenden Kreislinie. — Resultat der Drehung: Die Kugelfläche.** — Macht eine Ebene um eine in ihr liegende Gerade  $o$  eine ganze Umdrehung, so beschreibt eine Halbkreislinie, deren Durchmesser in der Axe liegt, eine krumme Fläche, die man Kugelfläche nennt.

Anm. Angenommen, die Ebene des Papiers drehe sich in Fig. 15 um die Axe  $o$ , so beschreiben zwei auf der Halbkreislinie beliebig angenommene Punkte  $A_1$  und  $A_2$  Kreislinien, die auf der Kugelfläche liegen und in der Figur die Gestalt derselben andeuten. — Da die sich drehende Ebene zum zweitenmale mit der Ebene des Papiers zusammenfällt, wenn sie eine halbe Umdrehung gemacht hat, so gerät auch die Halbkreislinie noch einmal in die letztere Ebene. Die Kugelfläche wird also von der Ebene des Papiers in einer Kreislinie geschnitten.

Beträgt die Drehung der Halbkreislinie weniger als einen geschlossenen Winkel, so wird die von ihr beschriebene Fläche Kugelzweieck genannt. Der Mittelpunkt der Halbkreislinie ( $O$ ) heisst auch Mittelpunkt (Centrum) der Kugelfläche, jeder Radius der Halbkreislinie in jeder seiner verschiedenen Richtungen Radius der Kugelfläche, jeder von der Halbkreislinie beschriebene Raumwinkel Centriwinkel.

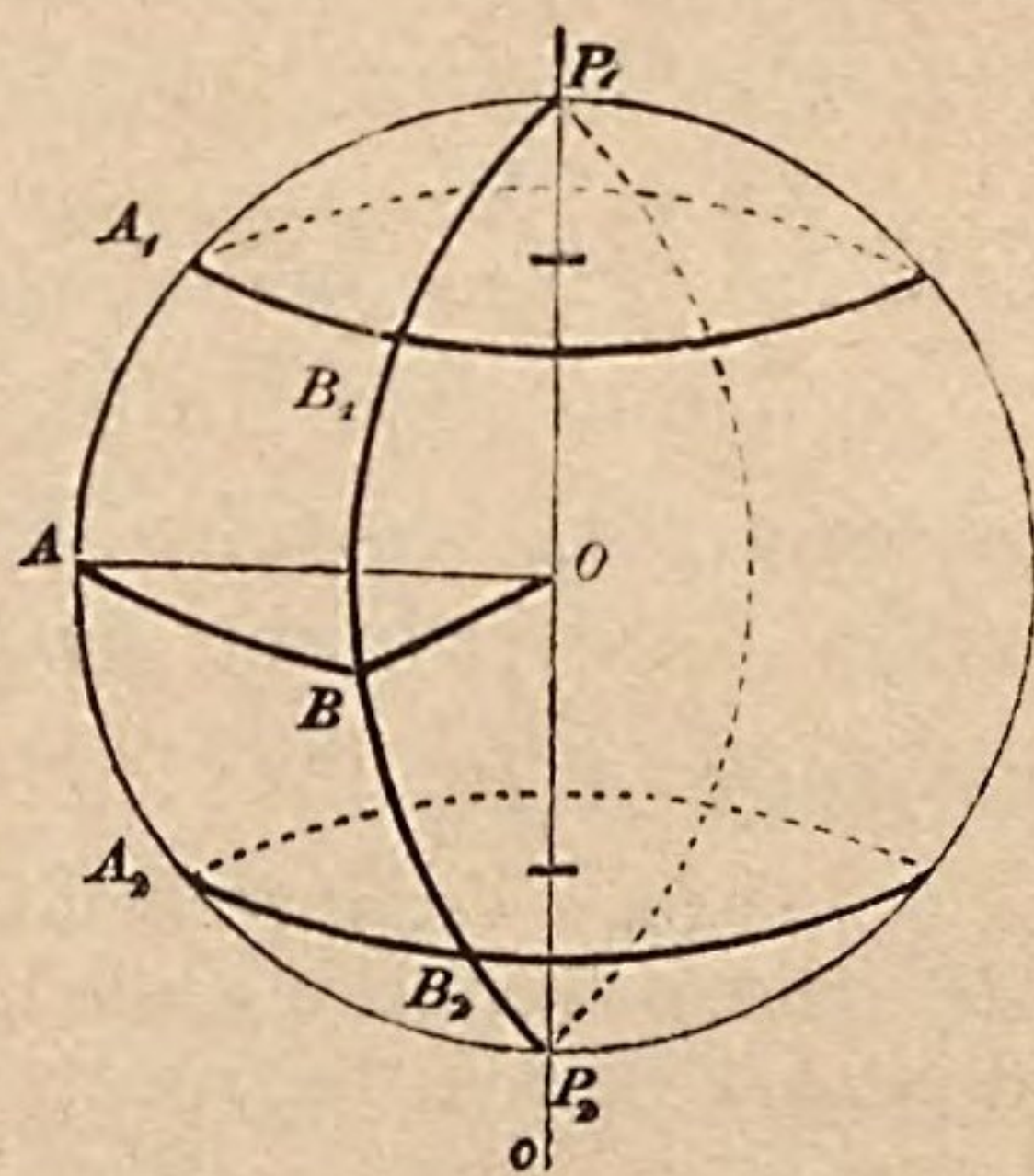
Der Mittelpunkt einer Kugelfläche ist also derjenige Punkt, dessen Verbindungsstrecken mit beliebigen Punkten der Kugelfläche gleich gross sind; Radius jede Strecke, welche einen Punkt der Kugelfläche mit dem Mittelpunkte verbindet.

Aus der Entstehung der Kugelfläche folgen die Sätze:

Alle Radien einer Kugelfläche sind einander 80. gleich.

Der geometrische Ort eines Punktes, der von 81. einem gegebenen Punkte eine gegebene Entfernung hat, ist die aus dem gegebenen Punkte mit der gegebenen Entfernung als Radius konstruierte Kugelfläche.

Fig. 15.





Anm. Die Konstruktion einer Kugelfläche aus einem gegebenen Punkte mit einem gegebenen Radius ist eine der (freilich nur theoretisch erfüllbaren) Forderungen der konstruierenden Stereometrie. Ebenso steht es mit der Konstruktion der Kegel- und der Cylinderfläche.

Legt man durch den Mittelpunkt der Kugelfläche eine Ebene, so schneidet dieselbe die Kugelfläche in einer Linie, deren Punkte alle vom Mittelpunkte um die Länge des Radius entfernt sind (80), d. h. in einer Kreislinie mit gleichem Radius. Man hat also den Satz:

82. Alle durch den Mittelpunkt einer Kugelfläche gelegten Ebenen schneiden die Kugelfläche in Kreislinien mit gleichem Radius (Diametralkreisen).

Der Durchmesser eines Diametralkreises heisst Durchmesser der Kugelfläche, die Endpunkte eines Durchmessers heissen Gegenpunkte der Kugelfläche.

Anm. Hiernach kann jede Hälfte einer beliebigen derartigen Kreislinie durch ihre Umdrehung dieselbe Kugelfläche erzeugen.

Wenn eine Halbkreislinie auf der Kugelfläche ein Kugelseck  $\widehat{AB}$  beschreibt, so beschreibt die zugehörige Ebene einen Centriwinkel  $AOB$ , von dem man sagt, er gehöre zum Zweiseck  $A_3B_3$ .

Anm. Entsprechend dem konvexen Centriwinkel  $AOB$  wird durch die beiden Halbkreislinien  $A_1A_2$  und  $B_1B_2$  auf der Kugelfläche noch ein zweites Zweiseck begrenzt, welches mit dem ersten zusammen die ganze Kugelfläche bildet. Jedes Zweiseck liegt in dem Raumstück des zugehörigen Centriwinkels.

Die beiden Zweisecke  $\widehat{AB}$ , welche zusammen die Kugelfläche bilden, heissen einander entgegengesetzt.

Da das Zweiseck durch dieselbe Bewegung entsteht wie der Centriwinkel, so kann es ebenso wie dieser als Mass für die Drehung der Ebene betrachtet werden. Uebertragung der Sätze vom Raumwinkel auf das Zweiseck.

83. Zu gleichen Centriwinkeln einer Kugelfläche gehören gleiche Zweisecke (und umgekehrt). — Zu dem grösseren von zwei Centriwinkeln einer Kugelfläche gehört das grössere Zweiseck (und umgekehrt).

Aus 83 folgt:

84. Jede durch den Mittelpunkt einer Kugelfläche gehende Ebene halbiert die Kugelfläche. — Zwei solche Ebenen, die auf einander senkrecht stehen, teilen die Kugelfläche in vier gleiche Teile (s. auch 97).

Anm. Die Hälfte der Kugelfläche heisst Halbkugel(fläche). Anwendung der vorstehenden Erklärungen und Sätze auf den Globus.



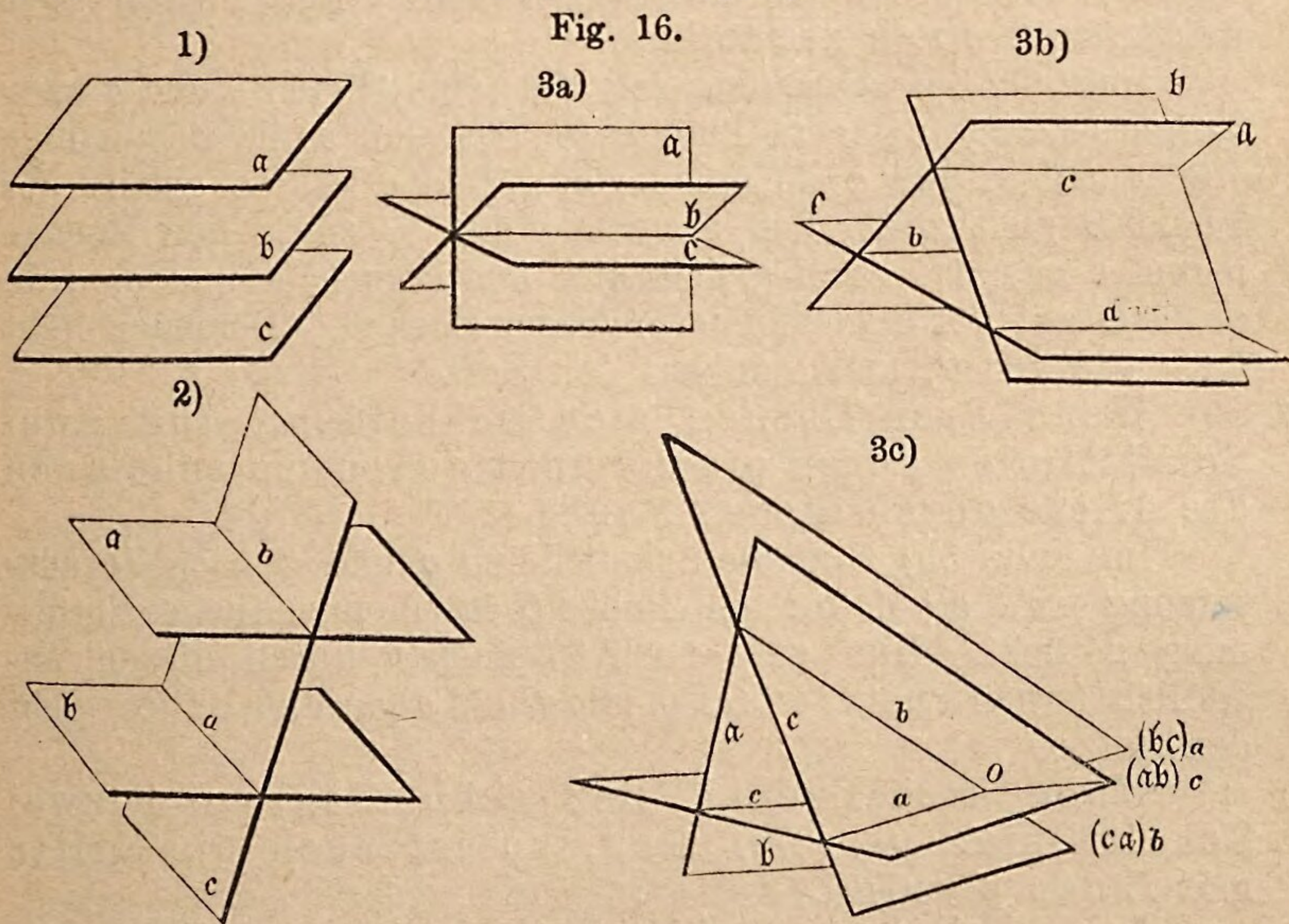
Da man aus einem Punkte des Raumes mit demselben Radius nur eine Kugelfläche konstruieren kann, so ist die Kugelfläche durch ihren Radius nach Gestalt und Grösse vollständig bestimmt. Daraus folgt:

Kugelflächen mit gleichem Radius sind kongruent.

Anm. Wie zwischen der Geraden und der Ebene, so besteht auch eine Analogie zwischen der Kreislinie und der Kugelfläche. Wie die Ebene aus der Geraden durch Verschiebung, so entsteht die Kugelfläche aus der Kreislinie durch Drehung. Einem Punkte auf der Kreislinie entspricht eine Halbkreislinie auf der Kugelfläche, einem Radius der Kreislinie eine Halbkreisfläche der Kugelfläche. Rückt der Mittelpunkt in unendliche Entfernung, so nähert sich die Kreislinie einer Geraden und die Kugelfläche einer Ebene. (Scheinbar ebene Beschaffenheit der Erdoberfläche!) Andere Analogieen werden sich später zeigen.

$\beta$ ) Zweimalige Bewegung der Ebene.

**23. Uebersicht.** — Ist eine Ebene  $a$  durch zwei auf einander folgende Bewegungen erst in  $b$  und dann in  $c$  übergegangen, so können die beiden Bewegungen sein: 1) zwei Ver-



schiebungen, 2) eine Verschiebung und eine Drehung, 3) zwei Drehungen. Im dritten Falle können die beiden Drehungen entweder 3a) um dieselbe Gerade oder 3b) um zwei parallele oder 3c) um zwei sich schneidende Geraden stattfinden (Fig. 16).



Man hat alsdann 1) drei Ebenen mit gleicher Seite; 2) zwei von einer dritten geschnittene parallele Ebenen; 3a) drei Ebenen mit gleicher Lage und Richtung; 3b) drei Ebenen mit verschiedener Seite, welche paarweise gleiche Richtung und Lage haben; 3c) drei Ebenen mit verschiedener Seite, welche paarweise gleiche Richtung und alle drei dieselbe Lage haben.

Anm. Drei Ebenen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  schneiden sich im allgemeinen in den drei Geraden  $\alpha\beta = \gamma$ ,  $\beta\gamma = \alpha$ ,  $\gamma\alpha = \beta$ . Im Falle 3) ist nur von zweien dieser Geraden ( $\gamma$  und  $\alpha$ ), um welche die beiden Drehungen stattfinden, die Rede; das Verhalten der dritten ( $\beta$ ) bedarf einer besonderen Untersuchung, deren Resultat die Sätze 86—88 ausdrücken. — In wieviel Teile wird der Raum in jedem der fünf Fälle geteilt? Wieviele Schnittlinien entstehen in jedem Falle? Wie ordnen sich die 5 Fälle nach der Anzahl dieser Schnittlinien?

Im Falle 3a) ist die Schnittlinie von  $\alpha$  und  $\beta$  nach Voraussetzung dieselbe wie die von  $\beta$  und  $\gamma$ , demnach auch dieselbe wie von  $\alpha$  und  $\gamma$ . Dies giebt den Satz:

86. Wenn drei Ebenen sich schneiden und zwei Schnittlinien zusammenfallen, so fällt auch die dritte mit ihnen zusammen.

Im Falle 3c) schneiden sich die Schnittlinien  $\gamma$  und  $\alpha$  nach Voraussetzung in einem Punkte  $O$ . Da nun  $\gamma$  die Schnittlinie von  $\alpha$  und  $\beta$ , und  $\alpha$  diejenige von  $\beta$  und  $\gamma$  ist, so gehört der Punkt  $O$  gleichzeitig den Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$ , sowie den Ebenen  $\beta$  und  $\gamma$  an, also auch gleichzeitig den Ebenen  $\alpha$  und  $\gamma$ ; d. h. er liegt auf der Schnittlinie ( $\beta$ ) dieser Ebenen. Demnach geht auch  $\beta$  durch  $O$ , und man hat den Satz:

87. Wenn drei Ebenen sich schneiden, und zwei Schnittlinien durch einen Punkt gehen, so geht auch die dritte durch diesen Punkt.

Im Falle 3b) sind die Schnittlinien  $\gamma$  und  $\alpha$  nach Voraussetzung parallel; d. h.: der Punkt  $O$  ist in unendliche Entfernung gerückt. Nun geht nach 87 auch  $\beta$  durch diesen unendlich fernen Punkt, ist also mit  $\alpha$  und  $\gamma$  parallel. Dies giebt den Satz:

88. Wenn drei Ebenen sich schneiden, und zwei Schnittlinien parallel sind, so ist auch die dritte mit ihnen parallel.

Anm. Weil je zwei Schnittlinien stets in einer Ebene liegen, können keine zwei Schnittlinien windschief sein.

Da der Fall 1) zu keiner besonderen Bemerkung Anlass giebt, so betrachten wir der Reihe nach die Fälle 3a), 2), 3b), 3c).



**24. Drei in einer Geraden sich schneidende Ebenen.** — Wenn drei in einem Punkte sich schneidende Geraden einer Ebene durch einfache Verschiebung aus dieser Ebene heraustreten, so entstehen drei in einer Geraden sich schneidende Ebenen (Fig. 16, 3a). Jeder Satz über die Winkel der drei Geraden giebt dann einen Satz über die Raumwinkel der drei Ebenen, und es können daher die Untersuchungen und Sätze über ebene Winkel in T. II, Nr. 37—51 ohne weiteres auf Raumwinkel übertragen werden.

**25. Zwei von einer dritten geschnittene parallele Ebenen.** — Wenn zwei von einer dritten geschnittene parallele Geraden durch einfache Verschiebung aus ihrer Ebene heraustreten, so entstehen zwei von einer dritten geschnittene parallele Ebenen (Fig. 16, 2). Jeder Satz über die Winkel der drei Geraden giebt dann einen Satz über die Raumwinkel der drei Ebenen, und es können daher die Untersuchungen und Sätze über ebene Winkel in T. II, Nr. 52—57 ohne weiteres auf Raumwinkel übertragen werden.

Da die Geraden  $a$  und  $b$ , in welchen die parallelen Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  von  $c$  geschnitten werden, nicht windschief sein können, weil sie in derselben Ebene  $c$  liegen, und sich auch nicht schneiden können, weil sie in den parallelen Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  liegen, so müssen sie parallel sein. Mithin:

Parallele Ebenen haben mit derselben Ebene 89. parallele Schnittlinien.

**26. Die unendlich ferne Gerade einer Ebene.** — Wenn die Ebene  $c$  (Fig. 16, 2) sich um die Gerade  $b$  dreht, um mit  $a$  zusammenzufallen, so verschiebt sich ihre Schnittlinie mit  $\beta$  (die Gerade  $a$ ) auf der Ebene  $\beta$ , und entfernt sich so immer weiter von ihrer ursprünglichen Lage. So lange die Ebene  $c$  noch nicht die mit  $\beta$  parallele Seite  $\alpha$  angenommen hat, existiert diese Schnittlinie in endlicher, messbarer Entfernung. Ist aber  $c$  in  $\alpha$  übergegangen, also mit  $\beta$  parallel geworden, so sagt man, die Schnittlinie der Ebenen  $c$  und  $\beta$  sei in unendliche Entfernung gerückt. Statt also zu sagen: zwei parallele Ebenen haben keine (endlich entfernte) Gerade gemeinsam, kann man auch sagen: sie schneiden sich in einer unendlich fernen Geraden. — Da zwei parallele Ebenen gleiche Seite haben, so kann man die unendlich ferne Gerade einer Ebene auch als Vertreterin ihrer Seite ansehen. — Da eine Ebene von anderen Ebenen in Geraden von allen auf



ihr möglichen Richtungen geschnitten wird, und da jede dieser Schnittlinien durch Verschiebung in die unendlich ferne Gerade übergehen kann, so ist es gleichgültig, mit welcher Richtung man sich die unendlich ferne Gerade vorstellt.

Da die unendlich ferne Gerade von jeder andern Geraden der Ebene offenbar in einem unendlich fernen Punkte geschnitten wird, so kann man sagen:

90. Die unendlich fernen Punkte aller Geraden einer Ebene liegen auf der unendlich fernen Geraden dieser Ebene.

Anm. Durch Erweiterung dieser Betrachtung gelangt man zu dem Resultat, dass die unendlich fernen Geraden aller Ebenen des Raumes auf der unendlich fernen Ebene des Raumes liegen.

Dreht sich die Ebene  $c$ , nachdem sie mit  $a$  zusammen gefallen ist, noch weiter, so kommt ihre Schnittlinie mit  $b$ , welche vorher nach der einen Seite in unendliche Entfernung gerückt war, von der andern Seite her aus unendlicher Entfernung wieder zum Vorschein und nähert sich wieder ihrer ursprünglichen Lage  $a$ .

Hiernach erscheint die Parallelität zweier Ebenen als ein specieller Fall des Schneidens, und man kann mit Hilfe der eben festgestellten Ausdrucksweise sagen, dass zwei Ebenen im Raume stets eine Gerade gemeinsam haben, nämlich eine endlich entfernte (oder Lage und Richtung), wenn sie sich schneiden, eine unendlich ferne (oder die Seite), wenn sie parallel sind. — Ebenso erscheint die Verschiebung einer Ebene als specieller Fall der Drehung, nämlich als Drehung um die unendlich ferne Gerade der Ebene.

Analoge Betrachtungen, wie sie am Schluss von Nr. 58 in T. II angestellt wurden, führen zu den Sätzen:

91. Eine Gerade kann als Cylinderfläche mit einem Radius von der Grösse Null betrachtet werden, deren Axe mit der Geraden selbst zusammenfällt.
92. Eine Ebene kann als Cylinderfläche mit unendlich grossem Radius betrachtet werden, deren Axe die unendlich ferne Gerade einer zu der Ebene senkrechten Ebene ist.
93. Eine Gerade kann als Kegelfläche mit einem Winkel an der Spitze von der Grösse Null betrachtet werden, deren Axe mit der Geraden selbst zusammenfällt.
94. Eine Ebene kann als Kegelfläche mit einem Win-



kel an der Spitze von der Grösse  $2R$  betrachtet werden, deren Axe eine zu der Ebene senkrechte Gerade ist.

Da ferner durch Drehung der Kreislinie die Kugelfläche entsteht, der Punkt aber (nach T. II, 74) als specieller Fall der Kreislinie angesehen werden kann, so folgt:

Ein Punkt kann als Kugelfläche mit einem Radius 95. von der Grösse Null angesehen werden, deren Mittelpunkt mit dem Punkte selbst zusammenfällt.

Da endlich auch die Gerade (nach T. II, 75) als specieller Fall der Kreislinie angesehen werden kann, und die Verschiebung der Ebene als Drehung um eine unendlich ferne Gerade, so wird die Ebene, welche von einer Geraden beschrieben wird, die auf einer sich verschiebenden Ebene liegt, ein specieller Fall der Kugelfläche sein. Folglich:

Eine Ebene kann als Kugelfläche mit unendlich 96. grossem Radius betrachtet werden, deren Mittelpunkt der unendlich ferne Punkt einer auf der Ebene senkrechten Geraden ist.

**27. Drei in parallelen Geraden sich schneidende Ebenen.** — Wenn drei in drei Punkten sich schneidende Geraden durch einfache Verschiebung aus ihrer Ebene heraustreten, so entstehen drei in parallelen Geraden sich schneidende Ebenen (Fig. 16, 3b). Jeder Satz über die Winkel der drei Geraden giebt dann einen Satz über die Raumwinkel der drei Ebenen, und es können daher die Untersuchungen und Sätze über ebene Winkel in T. II, Nr. 59—87 ohne weiteres auf Raumwinkel übertragen werden.

Drei oder mehrere Ebenen, welche sich in parallelen Geraden schneiden, begrenzen ein offenes prismatisches Raumstück. Das von einer Cylinderfläche begrenzte offene Raumstück ist ein specieller Fall hiervon.

## Die dreiseitige Ecke.

### 1) Die Ecke als Analogon zum Winkel.

**28. Drei in einem Punkte sich schneidende Ebenen. Die dreiseitige Ecke.** — *Vorbemerkungen.* — Drei Ebenen ( $a, b, c$ ), welche sich in drei durch denselben Punkt ( $O$ ) gehenden Geraden ( $a, b, c$ ) schneiden, teilen den Raum in acht unvollständig begrenzte Teile, deren jeder eine (dreiseitige) Ecke genannt wird. Der Punkt  $O$  heisst der Scheitel, die Geraden  $a, b, c$ ,



vom Scheitel an gerechnet, heissen die Kanten, die Ebenen  $a, b, c$ , soweit sie zwischen den Kanten liegen, die Schenkelebenen der Ecke.

Die Kanten der Ecke sind also nur einseitig durch den Scheitel begrenzt, die Schenkelebenen sind die Ebenenstücke der von den Kanten gebildeten Winkel. Die Begrenzung dieser Ebenenstücke in der Zeichnung geschieht am besten durch Kreisbogen, die mit gleichem Radius aus  $O$  in jeder der drei Ebenen beschrieben werden (S. Fig. 18, S. 41).

Da alle Punkte dieser Kreisbogen von  $O$  gleichweit entfernt sind, so liegen sie auf einer aus dem Mittelpunkte  $O$  beschriebenen Kugelfläche.

Anm. Sofern man unter einem ebenen Winkel die Drehungsgrösse zwischen zwei Geraden versteht, können Winkel und Ecke nicht als entsprechende Gebilde der Ebene und des Raumes angesehen werden. Denn der Winkel entsteht durch eine Drehung einer Geraden, die Ecke dagegen durch zwei Drehungen einer Ebene um verschiedene Geraden. Die Ecke kann also nicht als einfache Drehungsgrösse betrachtet werden.

Sofern man aber unter einem ebenen Winkel das von den Schenkeln des Winkels unvollständig begrenzte Ebenenstück versteht, ist die Ecke als räumliches Gebilde analog dem Winkel als ebenem Gebilde. Nur tritt an die Stelle der Zahl 2 (Anzahl der Ausdehnungen der Ebene) überall die Zahl 3 (Anzahl der Ausdehnungen des Raumes). Es entsprechen sich: 2 Bestimmungsstücke des Winkels (Scheitel und Schenkel) und 3 der Ecke (Scheitel, Kanten und Schenkelebenen); 2 Begrenzungsgebilde des Winkels (die Schenkel) und 3 der Ecke (die Schenkelebenen);  $2^2 = 4$  Winkel, welche durch zwei sich schneidende Geraden und  $2^3 = 8$  Ecken, welche durch drei sich schneidende Ebenen gebildet werden. Wie aus dem Winkel durch Hinzufügung einer Geraden oder einer Kreislinie eine Figur, so entsteht aus der Ecke durch Hinzufügung einer Ebene oder einer Kugelfläche ein Körper. Wie die Grösse eines Winkels durch diejenige des zwischen seinen Schenkeln liegenden Kreisbogens veranschaulicht werden kann, so die Grösse einer Ecke durch diejenige des zwischen ihren Schenkelebenen liegenden Teiles der Kugelfläche.

**29. Einteilung der Ecken nach ihrer Grösse.** — Unter der Grösse einer Ecke verstehen wir die Grösse des zwischen ihren Schenkelebenen liegenden Teils einer Kugelfläche, die aus dem Scheitel der Ecke als Mittelpunkt mit dem Radius 1 beschrieben ist.

Anm. Die Grösse einer Ecke ist hierdurch unabhängig von der Grösse der Drehungen, durch welche sie entstanden ist, bestimmt. Ebenso konnte als Grösse eines Winkels die Grösse des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens einer Kreislinie betrachtet werden, die aus dem Scheitel des Winkels als Mittelpunkt mit dem Radius 1 beschrieben wurde (vgl. T. III, Nr. 34). Hierdurch lässt sich, wie wir später sehen werden, die Grösse der Ecke ebenso wie die des Winkels durch ein Vielfaches von  $\pi$  ausdrücken, indem die ganze Kugelfläche den Wert  $4\pi$  hat.



Die der ganzen Kugelfläche entsprechende Ecke heisst geschlossene Ecke. Ihre Schenkelebenen schneiden sich in einer einzigen Geraden, und haben beliebige Seite, ihre Kanten fallen in eine einzige zusammen.

Anm. Gleiche Gestalt mit der geschlossenen Ecke hat auch die Ecke von der Grösse Null (Nullecke), welcher ein Punkt der Kugelfläche entspricht.

Die der halben Kugelfläche entsprechende Ecke heisst flache Ecke. Ihre drei Schenkelebenen fallen in eine einzige zusammen (84), ihre Kanten liegen in derselben Ebene und haben beliebige Richtung.

Anm. Wie die geschlossene und die Nullecke (die Kugelfläche und der Punkt) sich zu einer geschlossenen Ecke ergänzen, so auch die beiden flachen Ecken (die beiden Halbkugelflächen), welche zu beiden Seiten einer Ebene liegen. (Ebenso in der Ebene der geschlossene und der Nullwinkel, sowie die beiden gestreckten Winkel zu beiden Seiten einer Geraden.) — Eine Ecke heisst konvex, wenn sie grösser, konkav, wenn sie kleiner ist als eine flache.

Die dem vierten Teile der Kugelfläche entsprechende Ecke heisst gestreckte Ecke. Zwei ihrer Schenkelebenen fallen in eine einzige zusammen, auf welcher die dritte senkrecht steht (84), zwei ihrer Kanten fallen in eine einzige zusammen, die Richtung der dritten ist beliebig.

Anm. Einer gestreckten Ecke entspricht also als Teil der Kugelfläche ein spezieller Fall des Zweiecks (vgl. Nr. 22). Wie ist die Ecke beschaffen, die dem allgemeinen Zweieck entspricht?

Wenn eine Halbkreislinie ein Zweieck beschreibt, so beschreibt der Halbierungspunkt der Halbkreislinie einen Bogen, welcher die Fläche des Zweiecks halbiert. Da die Ebene dieses Bogens auf den Ebenen des Zweiecks senkrecht steht, so hat man den Satz (Ergänzung zu 84):

Drei durch den Mittelpunkt einer Kugelfläche 97. gehende, auf einander senkrechte Ebenen teilen die Kugelfläche in acht gleiche Teile.

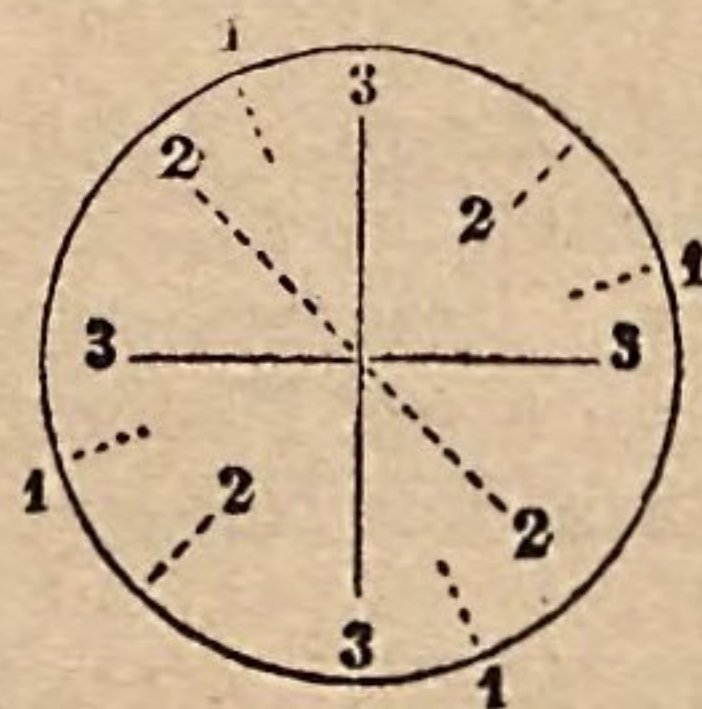
Anm. Modell mittelst dreier aus Papier ausgeschnittener, in einander gesteckter Kreise, die nach Angabe von Fig. 18 eingeschnitten sind

Die dem achten Teile der Kugelfläche entsprechende Ecke heisst rechte Ecke. Ihre drei Schenkelebenen stehen auf einander senkrecht, ebenso ihre drei Kanten.

Aus 85 folgt der Reihe nach:

Alle geschlossenen, alle flachen, alle gestreck- 98. ten und alle rechten Ecken sind einander gleich. —

Fig. 17.





Die flache Ecke ist die Hälfte, die gestreckte der vierte Teil, die rechte der achte Teil der geschlossenen Ecke.

**30. Nebenecken, Nebenscheitelecken und Scheitelecken. \*)** — Soll die durch drei sich schneidende Ebenen gebildete Ecke nicht eine vieldeutige Grösse sein, so muss man auf jeder der drei Ebenen eine bestimmte Seite festsetzen, und als Ecke der drei Ebenen diejenige der acht im ganzen entstehenden Ecken bezeichnen, deren Innenseiten die drei festgesetzten Seiten sind.

Zu jeder konkaven Ecke gehört eine durch ihre Aussen-seiten gebildete konvexe Ecke, welche mit ihr zusammen eine geschlossene Ecke ausmacht. Unter der Ecke dreier Ebenenstücke versteht man, wenn nichts anderes darüber festgesetzt ist, jedesmal die konkave Ecke.

Die Ecken, welche zwei Ebenen mit den beiden entgegengesetzten Seiten einer dritten Ebene bilden, heissen Nebenecken. Zwei Nebenecken bilden zusammen ein Zweieck und  
98a. hängen durch eine Schenkelebene zusammen. — Die Summe zweier Nebenecken hat keine feste Grösse.

Anm. Wie konstruiert man zu einer gegebenen Ecke eine Nebenecke? — Wieviele Nebenecken kann man zu jeder Ecke konstruieren? — Wieviel Paare von Nebenecken entstehen, wenn drei Ebenen sich in einem Punkte schneiden? — Wenn man die Innenseiten der drei Ebenen  $a, b, c$  und die Aussen-seiten  $a_1, b_1, c_1$  nennt, wie heissen dann die acht entstehenden Ecken (jede Ecke durch ihre drei Seiten bezeichnet), und wie heissen die Nebeneckenpaare?

Die Ecken, welche eine Ebene mit zwei anderen und mit deren entgegengesetzten Seiten bildet, heissen Nebenscheitelecken. — Zwei Nebenscheitelecken hängen nur durch eine Kante zusammen. — Die drei Nebenecken einer Ecke bilden drei Paare von Nebenscheitelecken. — Zwei Paare Nebenscheitelecken an derselben Kante bilden zusammen eine flache  
98b. Ecke. — Zwei Nebenscheitelecken haben weder eine feste Summe, noch im allgemeinen gleiche Grösse.

Anm. Wie konstruiert man zu einer gegebenen Ecke eine Nebenscheitelecke? — Wieviele Nebenscheitelecken kann man zu einer gegebenen Ecke konstruieren? — Wieviel Paare von Nebenscheitelecken entstehen, wenn drei Ebenen sich in einem Punkte schneiden? — Wie heissen die Paare der Nebenscheitelecken?

---

\*) Hierzu ähnliches Modell wie Fig. 18. Nur müssen die beiden Schnitte jedes Kreises nicht rechte, sondern beliebige schiefe Winkel mit einander bilden.



Eine Ecke und diejenige Nebenecke ihrer Nebenscheitelecke, welche nicht Nebenecke der ersten ist, heissen zusammen Scheitelecken. — Die Scheitelecke einer Ecke ist also diejenige, welche die entgegengesetzten Seiten ihrer Schenkelebenen bilden.

Zwei Scheitelecken sind symmetrisch, also von 99. gleicher Grösse. Sie hängen nur durch den Scheitel zusammen. Die drei Nebenecken einer Ecke sind die Nebenscheitelecken ihrer Scheitelecke und umgekehrt.

Anm. Wie konstruiert man zu einer gegebenen Ecke eine Scheitelecke? — Wieviele Scheitelecken kann man zu einer gegebenen Ecke konstruieren? — Wieviel Paare von Scheitelecken entstehen, wenn drei Ebenen sich in einem Punkte schneiden? — Wie heissen die Paare der Scheitelecken?

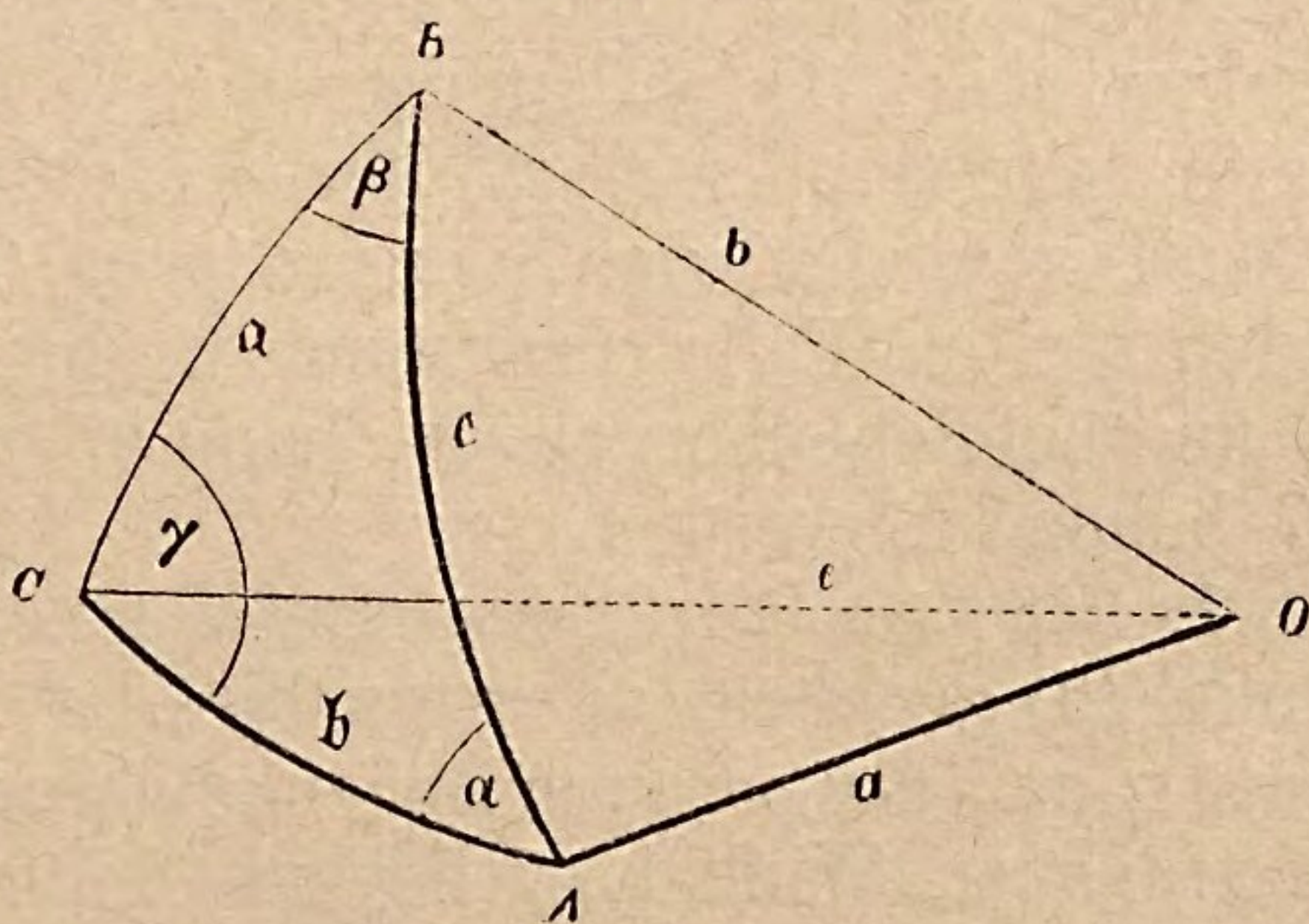
## 2) Die Ecke als Analogon zum Dreieck.

31. *Vorbemerkungen.* — Die ebenen Winkel, welche die Kanten einer Ecke mit einander bilden, heissen auch Seiten der Ecke; die Raumwinkel, welche die Schenkelebenen der Ecke mit einander bilden, heissen auch Winkel der Ecke. Eine dreiseitige Ecke hat also drei Seiten und drei Winkel. — In Bezug auf eine Seite der Ecke heissen die beiden Winkel, welche diese Seite zur gemeinsamen Schenkelebene haben, die der Seite anliegenden Winkel, der dritte heisst der der Seite gegenüberliegende Winkel. — In Bezug auf einen Winkel heissen die beiden Seiten, welche seine Schenkelebenen bilden, die den Winkel einschliessenden Seiten; die dritte heisst die dem Winkel gegenüberliegende Seite. — Es liegen sich also in der dreiseitigen Ecke gegenseitig je ein Winkel und eine Seite gegenüber.

Die Bezeichnung der Seiten einer Ecke geschieht durch kleine deutsche, die Bezeichnung der Winkel durch kleine griechische Buchstaben, so dass jede Seite den der gegenüberliegenden Ecke entsprechenden Buchstaben erhält. (S. Fig. 18.)

Anm. Bereits aus Anzahl und Beschaffenheit der Stücke geht die Analogie zwischen Dreieck und dreiseitiger Ecke hervor. Diese Analogie wird im folgenden noch weiter begründet werden.

Fig. 18.





**32. Bestimmung der Ecke durch Seiten und Winkel.** — Seiten und Winkel einer Ecke heissen ihre Stücke. Eine dreiseitige Ecke\*) hat also 6 Stücke.

Ist zur Konstruktion einer Ecke nur ein Stück gegeben, so kann man sich dasselbe in fester Lage denken. Ist es eine Seite, so kann jede durch den Scheitel gehende Gerade (sofern sie nicht auf der durch die Seite bestimmten Ebene liegt) die gegenüberliegende Kante der Ecke sein. Ist es ein Winkel, so kann jede (mit keiner der Schenkelebenen parallele) durch den Scheitel gehende Ebene (sofern sie nicht durch die Scheitellinie des Winkels geht) die gegenüberliegende Seite der Ecke sein.

Sind zur Konstruktion der Ecke zwei Stücke gegeben, unter denen sich wenigstens eine Seite befindet,\*\*) so kann man sich diese Seite in fester Lage denken. Die gegenüberliegende Kante ist dann aber nicht mehr eine beliebige durch den Scheitel gehende Gerade, sondern liegt auf einer bestimmten Fläche, welche der geometrische Ort dieser Kante genannt wird.

Anm. Allgemein heisst eine Fläche, auf welcher eine mit einer bestimmten Eigenschaft begabte Gerade liegen muss, der geometrische Ort dieser Geraden. So lange die Gerade sich auf dieser Fläche bewegt, behält sie ihre Eigenschaft; sobald sie die Fläche verlässt, verliert sie dieselbe. Sind für eine Gerade zwei geometrische Oerter gegeben, so muss sie auf zwei Flächen zugleich liegen, d. h. in der Schnittlinie der beiden Flächen. (Schneiden sich die beiden Flächen in mehreren Geraden, so besitzt jede dieser Geraden die beiden verlangten Eigenschaften.) Eine Gerade ist also im allgemeinen durch zwei geometrische Oerter vollkommen bestimmt.

Ausser einer Seite ( $\alpha$ ) kann zur Bestimmung der Ecke gegeben sein: 1) ein anliegender Winkel ( $\beta$  oder  $\gamma$ ); 2) eine zweite Seite ( $b$  oder  $c$ ); 3) der gegenüberliegende Winkel ( $\alpha$ ). — Es soll zunächst der geometrische Ort der Kante  $a$  für die beiden ersten Fälle bestimmt werden. (Der dritte Fall wird als unerheblich übergangen, kann aber nach Analogie von T. II, 167 behandelt werden.)

1) Ist zu einer Ecke eine Seite ( $\alpha$ ) und ein anliegender Winkel ( $\beta$ ) gegeben, so muss die der Seite  $a$  gegenüberliegende Kante  $a$  auf der zweiten Schenkelebene des an  $a$  im Schenkel  $b$  angetragenen Winkels  $\beta$  liegen. Man hat also den Satz:

\*) Unter „Ecke“ soll im folgenden stets die dreiseitige Ecke verstanden werden.

\*\*) Der Fall, dass zwei Winkel gegeben sind, wird auf den zweier Seiten zurückgeführt werden.



Ist zu einer Ecke eine Seite und ein anliegender Winkel gegeben, so ist der geometrische Ort der dritten Kante die zweite Schenkelebene des an die Seite in ihrem Schenkel angetragenen Winkels. — ( $\alpha\beta$ ) 100.

2) Sind zu einer Ecke zwei Seiten ( $a, b$ ) gegeben, so muss der eine Schenkel von  $a(c)$  auch Schenkel von  $b$  sein. Man kennt also Grösse, Lage und Richtung von  $b$ , nur nicht die Seite. Der andere Schenkel von  $b(a)$  ist dann die der Seite  $a$  gegenüberliegende Kante. Dreht sich  $b$  um  $c$ , so beschreibt  $a$  eine Kegelfläche. Man hat also den Satz:

Sind zu einer Ecke zwei Seiten gegeben, so ist der geometrische Ort der dritten Kante die mit der zweiten Seite um einen Schenkel der ersten beschriebene Kegelfläche. — ( $ab$ ) 101.

Sind zur Konstruktion der Ecke drei Stücke gegeben, unter denen sich wenigstens eine Seite befindet,\*) und ist diese Seite festgelegt, so sind durch sie zwei Kanten der Ecke bestimmt. Zur Bestimmung der dritten Kante hat man aber zwei geometrische Oerter. Den einen liefert  $a$  in Verbindung mit dem zweiten, den andern wiederum  $a$  in Verbindung mit dem dritten der gegebenen Stücke. Die dritte Kante ist also ebenfalls vollkommen bestimmt, und dadurch die ganze Ecke. Man hat also den Satz:

Zur Bestimmung einer Ecke sind drei ihrer Stücke notwendig und hinreichend. 102.

Aus 29b folgt nun: Zwei Ecken, welche aus denselben drei Stücken in derselben Weise, jedoch an verschiedenen Stellen des Raumes, konstruiert sind, sind einander kongruent oder symmetrisch. 103.

**33. Die drei ersten Fälle der Bestimmung einer Ecke durch drei Stücke.** — Von den 6 Stücken der Ecke können auf folgende Arten drei zur Bestimmung gewählt werden:

- 1) Drei Seiten. ( $abc$ )
- 2) Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel. ( $ab\gamma$ )
- 3) Zwei Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel. ( $ab\beta$ )
- 4) Drei Winkel. ( $\alpha\beta\gamma$ )
- 5) Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel. ( $\alpha\beta c$ )
- 6) Eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel. ( $\alpha\beta a$ )

---

\*) Der Fall dreier Winkel wird auf den Fall dreier Seiten zurückgeführt werden.



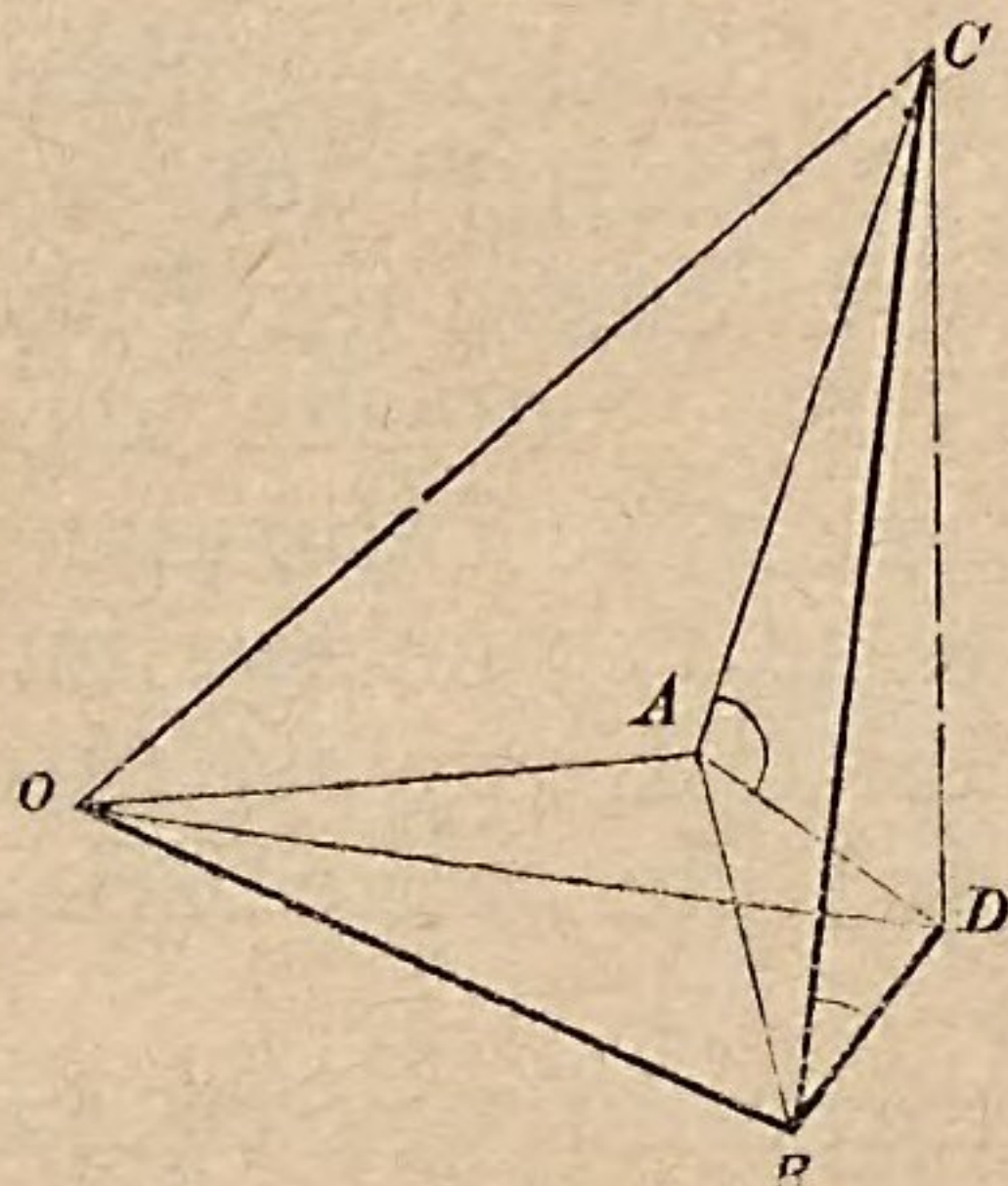
Erster Fall. Drei Seiten ( $abc$ ). — Ist  $a$  festgelegt, so ist nach 101 der erste geometrische Ort der Kante  $a$  (aus  $ab$ ) die mit  $b$  um  $c$  beschriebene Kegelfläche, und der zweite (aus  $ac$ ) die mit  $c$  um  $b$  beschriebene Kegelfläche. Da jede der beiden Kegelflächen symmetrisch zu  $a$  ist, so sind auch ihre beiden Schnittlinien ( $a$ ) symmetrisch zu  $a$  konstruiert, mithin sind die beiden entstehenden Ecken ( $\overline{abc}$ ) selbst symmetrisch.

Anm. Damit die beiden Kegelflächen sich schneiden, muss  $b + c > a$ , aber  $< 4R - a$  sein.

Aus 103 folgt nun:

104. Erster Kongruenzsatz: Zwei Ecken sind kongruent (oder symmetrisch), wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

Fig. 19.



Anm. Anderer Beweis von 104: Es seien  $O(ABC)$  und  $O_1(A_1B_1C_1)$  die beiden Ecken, so mache man  $OC = O_1C_1$  und konstruiere die Neigungswinkel der Ebene  $\overline{OAB}$  gegen  $\overline{OAC}$  ( $CAD$ ) und gegen  $\overline{OBC}$  ( $CBD$ ). Dieselbe Konstruktion wird in der anderen Ecke ausgeführt. Dann beweise man der Reihe nach die Kongruenz der Dreiecke

$\overline{OAC}$ ,  $\overline{OBC}$ ,  $\overline{AOB}$ ,  $\overline{DAB}$ ,  $\overline{CDA}$ ,  $\overline{CDB}$   
und  
 $\overline{O_1A_1C_1}$ ,  $\overline{O_1B_1C_1}$ ,  $\overline{A_1O_1B_1}$ ,  $\overline{D_1A_1B_1}$ ,  $\overline{C_1D_1A_1}$ ,  $\overline{C_1D_1B_1}$ .

Hiermit ist die Gleichheit zweier Winkelpaare der beiden Ecken bewiesen. Die Gleichheit des dritten Winkelpaars ergibt sich, wenn man in dem bisherigen Beweise die Buchstaben  $ABC$  cirkulär vertauscht, und  $E$  statt  $D$  setzt, wobei  $E$  der Fusspunkt der von  $A$  auf die Ebene  $\overline{OBC}$  gefällten Senkrechten ist.

Zweiter Fall. Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel ( $ab\gamma$ ). — Ist  $a$  festgelegt, so ist nach 101 der erste geometrische Ort der Kante  $a$  (aus  $ab$ ) die mit  $b$  um  $c$  beschriebene Kegelfläche. Der zweite geometrische Ort der Kante  $a$  (aus  $a\gamma$ ) ist nach 100 die zweite Schenkelebene des in  $c$  an  $a$  angetragenen Winkels  $\gamma$ . Da die beiden geometrischen Oerter sich nur in einer Geraden schneiden, so entsteht nur eine Ecke.

Aus 103 folgt nun:

105. Zweiter Kongruenzsatz: Zwei Ecken sind kongruent (oder symmetrisch), wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Anm. Anderer Beweis von 105 (Fig. 19): Sind die Seiten  $COA$ ,  $BOA$  und der Winkel  $CAD$  diejenigen Stücke der ersten Ecke, welche nach



Voraussetzung den homologen Stücken der zweiten Ecke gleich sind, so beweise man der Reihe nach die Kongruenz der Dreiecke

$$\overline{OAC}, \overline{CAD}, \overline{OAD}, \overline{OBD}, \overline{CDB}, \overline{OBC}$$

und

$$\overline{O_1A_1C_1}, \overline{C_1A_1D_1}, \overline{O_1A_1D_1}, \overline{O_1B_1D_1}, \overline{C_1D_1B_1}, \overline{O_1B_1C_1}.$$

Hiermit ist die Gleichheit des dritten Seitenpaares bewiesen, woraus die Kongruenz der Ecken nach 104 folgt.

Dritter Fall. Zwei Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel ( $\alpha\beta$ ).\*) — Ist  $\alpha$  festgelegt, so ist nach 101 der erste geometrische Ort der Kante  $\alpha$  (aus  $\alpha\beta$ ) die mit  $b$  um  $c$  beschriebene Kegelfläche. Der zweite geometrische Ort der Kante  $\alpha$  (aus  $\alpha\beta$ ) ist nach 100 die zweite Schenkel-ebene des in  $b$  an  $\alpha$  angetragenen Winkels  $\beta$ . Die beiden geometrischen Oerter schneiden sich entweder gar nicht, oder in einer Geraden (wenn  $b > a$  und  $a + b < 2R$ ), oder in zwei Geraden (wenn  $b < a$  und  $a + b < 2R$ ). Die Ecke ist also nur im zweiten Falle vollkommen bestimmt. Im dritten Falle sind zwei verschiedene Ecken möglich, und es muss zu den drei vorhandenen Bedingungen noch eine vierte treten, damit die Kongruenz der Ecken für diesen Fall ausgesprochen werden kann. (Ueber die Behandlung dieses Falles vergl. T. II, Nr. 69, letzte Anm.)

Im zweiten Falle enthält die an  $b$  grenzende Nebenecke die Stücke  $2R - a$ ,  $b$ ,  $\beta$ . Da diese Ecke durch die erste vollständig bestimmt ist, so ist sie es auch durch ihre eignen Stücke. Setzt man nun in den obigen Bedingungen  $b > a$  und  $a + b < 2R$  für  $a$  den Wert  $2R - a$ , so gehen sie über in  $b > 2R - a$  und  $2R - a + b < 2R$ , oder  $a + b > 2R$  und  $b < a$ . Die Ecke ist also auch dann vollkommen bestimmt, wenn diese letzteren Bedingungen erfüllt sind. Da beide Paare von Bedingungen aussagen, dass  $b$  zwischen  $a$  und  $2R - a$  liegt, so folgt aus 103:

Dritter Kongruenzsatz: Zwei Ecken sind kon- 106.  
gruent (oder symmetrisch), wenn sie in zwei Seiten und einem nicht eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, und die dem Winkel gegenüberliegende Seite zwischen der anderen und deren Supplementseite liegt.

Aus der Kongruenz (Symmetrie) zweier Ecken, die mit Hilfe der Gleichheit dreier Stücke bewiesen ist, folgt die Gleichheit der übrigen (homologen) Stücke. Also:

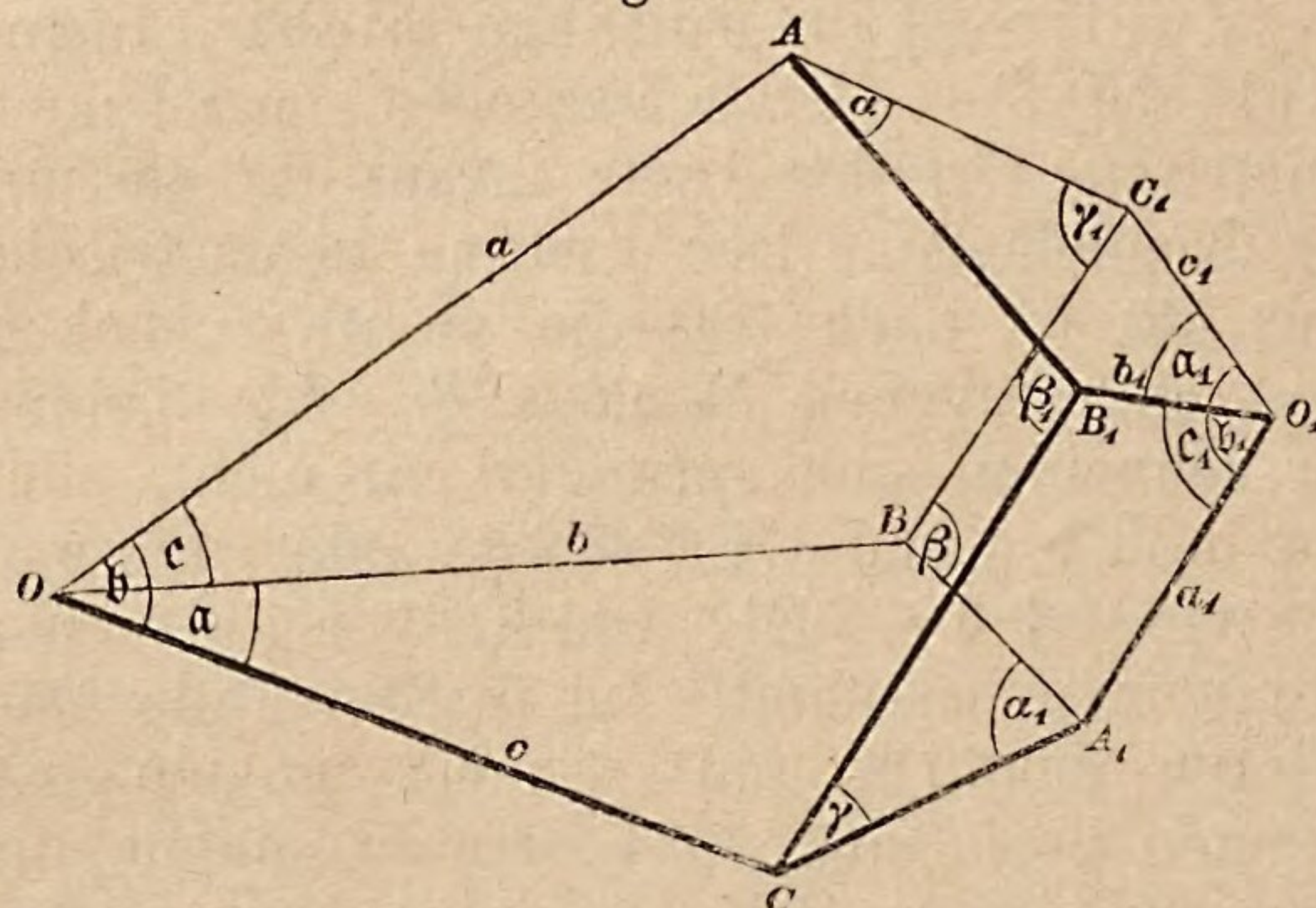
\*) Hierzu das in der Fussnote auf S. 40 erwähnte Modell, in welchem eine von denjenigen Ecken als zu konstruierende anzusehen ist, in welchen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  spitz sind.



107. In zwei kongruenten (symmetrischen) Ecken sind je zwei homologe Stücke einander gleich.

**34. Die Polarecke.** — Fällt man von einem beliebigen Punkte  $O_1$  innerhalb einer Ecke  $O(ABC)$  die Senkrechten  $O_1A_1$ ,  $O_1B_1$ ,  $O_1C_1$  auf die

Fig. 20.



auf die Seiten der Ecke (Fig. 20), so sind diese Senkrechten die Kanten einer neuen Ecke, welche die Polarecke der ersten genannt wird.

Fällt man aus einem anderen Punkte  $O_2$  die Senkrechten  $O_2A_2$ ,  $O_2B_2$ ,  $O_2C_2$ , so ist  $O_1A_1 \parallel O_2A_2$ ,  $O_1B_1 \parallel O_2B_2$ ,  $O_1C_1 \parallel O_2C_2$

(59), folglich  $A_1O_1B_1 = A_2O_2B_2$ ,  $B_1O_1C_1 = B_2O_2C_2$ ,  $C_1O_1A_1 = C_2O_2A_2$  (23), folglich  $O_1(A_1B_1C_1) \cong O_2(A_2B_2C_2)$  (104); d. h.:

108. Alle zu einer gegebenen Ecke konstruierten Polarecken sind einander kongruent.

Anm. Die Lage des Punktes  $O_1$  ist hiernach für Gestalt und Grösse der Polarecke gleichgiltig.

Da  $c_1 \perp (ab)$  und  $a_1 \perp (bc)$ ,

so ist nach (52) auch

$$(c_1a_1) \perp (ab) \text{ und } (c_1a_1) \perp (bc);$$

folglich nach (56)

$$b \perp (c_1a_1).$$

Durch cirkuläre Vertauschung der Buchstaben  $a, b, c$  findet sich ferner:

$$c \perp (a_1b_1); a \perp (b_1c_1);$$

109. d. h.: Stehen die Kanten der zweiten Ecke senkrecht auf den Seiten der ersten, so stehen auch die Kanten der ersten senkrecht auf den Seiten der zweiten. Anders ausgedrückt: Ist die zweite Ecke Polarecke der ersten, so ist auch die erste Polarecke der zweiten.

Da  $c_1 \perp (ab)$ , so ist nach 50 auch  $c_1 \perp AC_1$  und  $c_1 \perp BC_1$ ; d. h.:  $AC_1B$  ist der Neigungswinkel der Ebenen  $(b_1c_1)$  und  $(a_1c_1)$ , oder  $AC_1B = \gamma_1$ . Entsprechendes findet für alle Winkel der beiden Ecken statt, sodass man hat:



$$CA_1B = \alpha_1, \quad AB_1C = \beta_1, \quad BC_1A = \gamma_1;$$

$$C_1AB_1 = \alpha, \quad A_1BC_1 = \beta, \quad B_1CA_1 = \gamma.$$

Da nun  $a \perp (b_1c_1)$ , so ist auch  $a \perp AC_1$ ; und da  $b \perp (c_1a_1)$ , so ist auch  $b \perp BC_1$ ; d. h.: es ist  $OAC_1 = OBC_1 = R$ , und in dem Viereck  $\overline{AOC_1B}$  ist  $AOB + AC_1B = 2R$  (T. II, 84), oder  $c + \gamma_1 = 2R$ . Durch cirkuläre Vertauschung der Buchstaben und durch Umstellung der Indices erhält man das Resultat, dass folgende Ausdrücke den Wert  $2R$  haben:

$$a + \alpha_1, \quad b + \beta_1, \quad c + \gamma_1,$$

$$\alpha_1 + \alpha, \quad b_1 + \beta, \quad c_1 + \gamma;$$

d. h.: Jede Seite einer Ecke beträgt mit demjenigen 110. Winkel ihrer Polarecke, dessen Scheitellinie auf ihr senkrecht steht, zusammen  $2R$ .

Zwei Polarecken stehen also in der Beziehung zu einander, dass die Seiten der einen und die Winkel der andern Supplemente sind. Mittelst dieser Beziehung lässt sich aus jedem Satze, welcher von Seiten und Winkeln einer Ecke handelt, ein anderer ableiten, in welchem statt der Seiten die Winkel, statt der Winkel die Seiten auftreten.

**35. Die drei letzten Fälle der Bestimmung einer Ecke durch drei Stücke.** — Sind zwei Ecken kongruent, so sind ihre Seiten und Winkel, also nach 110 auch die Winkel und Seiten ihrer Polarecken gleich; daher sind auch ihre Polarecken kongruent. Also:

Sind zwei Ecken kongruent (symmetrisch), so sind 111. auch ihre Polarecken kongruent (symmetrisch).

Mittelst der Sätze 110 und 111 lässt sich nun die Kongruenz zweier Ecken in den noch übrigen drei Fällen darthun.

**Vierter Fall. Drei Winkel ( $\alpha\beta\gamma$ ).** — Sind in zwei Ecken die drei Winkel gleich, so sind nach 110 in ihren Polarecken die drei Seiten gleich ( $a_1b_1c_1$ ). (Denn werden die Stücke der zweiten Ecke und ihrer Polarecke durch einen hinzugefügten Strich von denen der ersten unterschieden, so folgt z. B. aus  $\alpha + \alpha_1 = 2R$ ,  $\alpha' + \alpha'_1 = 2R$ ,  $\alpha = \alpha'$ , dass auch  $\alpha_1 = \alpha'_1$  ist.) Folglich sind diese Polarecken einander kongruent (104), daher auch die gegebenen Ecken (111). Also:

**Vierter Kongruenzsatz:** Zwei Ecken sind kon- 112. gruent (oder symmetrisch), wenn sie in den drei Winkeln übereinstimmen.

**Fünfter Fall. Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel ( $\alpha\beta c$ ).** — Sind in zwei Ecken eine Seite und



die beiden anliegenden Winkel gleich, so sind nach 110 in ihren Polarecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich  $(\alpha_1 b_1 \gamma_1)$ . Folglich sind diese Polarecken einander kongruent (105), daher auch die gegebenen Ecken (111). Also:

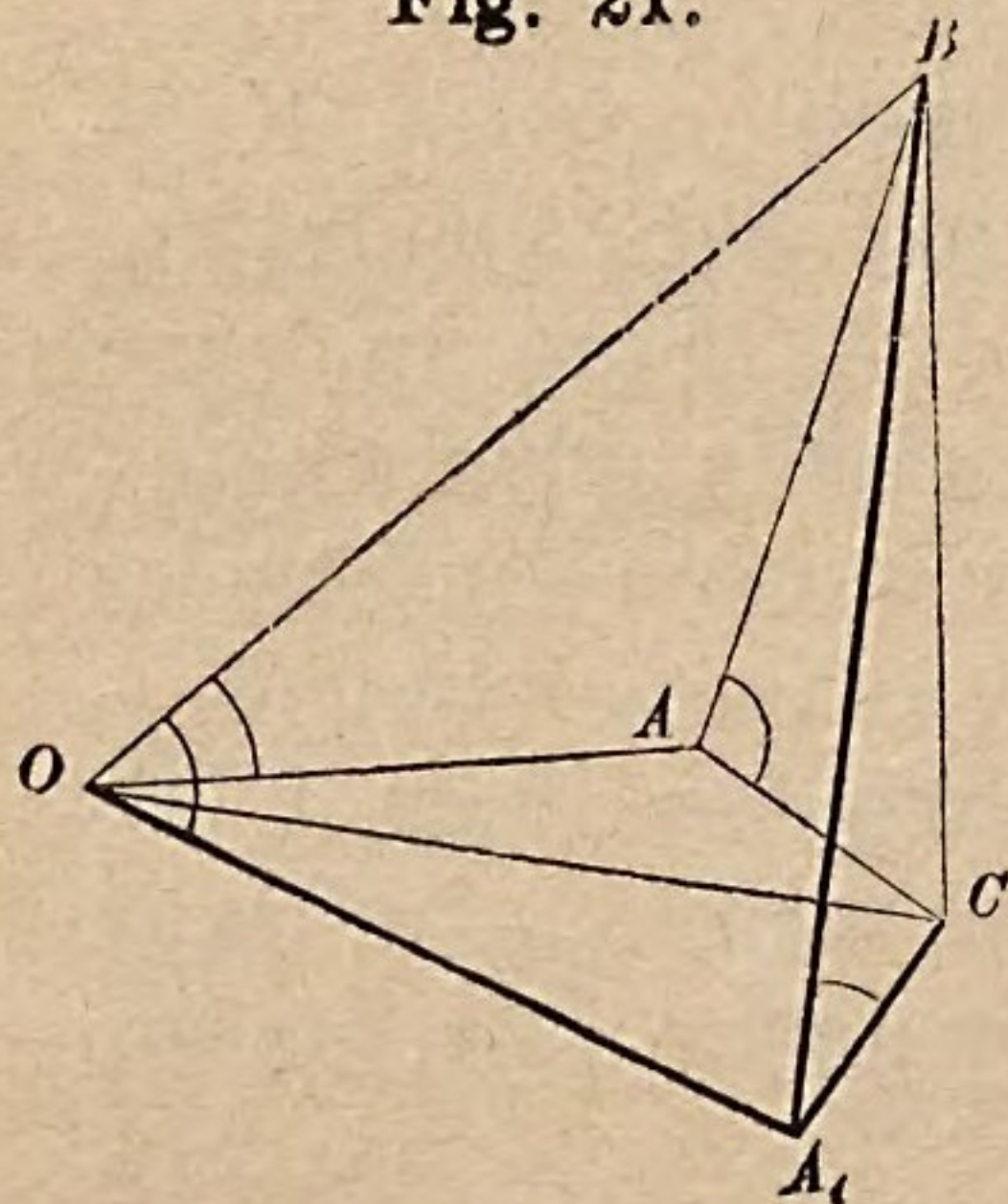
113. Fünfter Kongruenzsatz: Zwei Ecken sind kongruent (oder symmetrisch), wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Sechster Fall. Eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel  $(\alpha \beta b)$ . — Sind in zwei Ecken eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel gleich, so sind nach 110 in ihren Polarecken zwei Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel gleich  $(\alpha_1 b_1 \beta_1)$ . Folglich sind diese Polarecken einander kongruent (106), wenn  $b_1$  zwischen  $\alpha_1$  und  $2R - \alpha_1$  liegt. Daher sind auch die gegebenen Ecken kongruent (111), wenn  $2R - \beta$  zwischen  $2R - \alpha$  und  $2R - (2R - \alpha)$  liegt, d. h. wenn  $\beta$  zwischen  $\alpha$  und  $2R - \alpha$  liegt. Also:

114. Sechster Kongruenzsatz: Zwei Ecken sind kongruent (oder symmetrisch), wenn sie in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, und der der Seite gegenüberliegende Winkel zwischen dem andern und dessen Supplementwinkel liegt.

36. Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten einer Ecke. — Trägt man an ein Dreieck  $\overline{OBC}$  nach beiden Seiten

Fig. 21.



in  $OB$  den Winkel  $\beta$ , in  $OC$  den Winkel  $\gamma$  an, so erhält man zwei symmetrische Ecken (113)  $O(ABC)$  und  $O(A_1BC)$ . In diesen ist nach 107

Seite  $BOA = BOA_1$ , Seite  $COA = COA_1$ ,

Winkel  $BAC = BA_1C$  (vgl. Fig. 19).

Ist der Winkel  $\gamma$  ein rechter, so fallen die Ebenen  $OAC$  und  $OA_1C$  in eine zusammen, und die beiden Ecken bilden zusammen die Ecke  $O(ABA_1)$ . Da in dieser gleichzeitig Seite  $BOA = BOA_1$  und

Winkel  $BAC = BA_1C$  ist, so hat man den Satz:

115. Gleichen Seiten einer Ecke liegen gleiche Winkel gegenüber (und umgekehrt).

Anm. Andrer Beweis dieses Satzes:  $\overline{BOA} \cong \overline{BOA_1}$ ,  $\overline{BAC} \cong \overline{BA_1C}$ , daher  $BAC = BA_1C$ . — Spezielle Fälle von 115 sind?



Eine Ecke, in welcher zwei Seiten einander gleich sind, heisst gleichschenkelig. Sind alle drei Seiten gleich, so heisst sie gleichseitig.

Sind in einer Ecke zwei Seiten gleich, so halbiert 116. die Halbierungsebene des von ihnen eingeschlossenen Winkels die dritte Seite und steht auf ihr senkrecht. (Umkehrungssätze!)

Ist in der Ecke  $O(ABA_1)$  (Fig. 21)  $BOA_1 > BOA$ , so ist in den rechtwinkligen Dreiecken  $\overline{BOA_1}$  und  $\overline{BOA}$  die Seite  $BA_1 > BA$  (T. II, 175); folglich in den rechtwinkligen Dreiecken  $\overline{BCA_1}$  und  $\overline{BCA}$  der Winkel  $BAC > BA_1C$  (T. II, 118). Man hat also die Sätze:

Der grösseren von zwei Seiten einer Ecke liegt 117. der grössere Winkel gegenüber. — Dem grösseren von zwei Winkeln einer Ecke liegt die grössere Seite gegenüber.

Ist in der Ecke  $O(BAA_1)$  (Fig. 22)  $BOA = BOA_1$ ,  $OA = OA_1$ , ist ferner durch einen beliebigen Punkt  $E$  auf der Verlängerung von  $A_1B$  die Ebene ( $EOA$ ) gelegt, so ist  $OBA \cong OBA_1$  (T. II, 91), folglich  $BA = BA_1$ , ferner  $(EB + BA =) EA_1 > EA$  (T. II, 109); daher ist in den Dreiecken  $\overline{EOA_1}$  und  $\overline{EOA}$  Winkel  $EOA_1 > EOA$  (T. II, 123), oder, da  $EOA_1 = EOB + BOA_1 = EOB + BOA$  ist, so ist in der Ecke  $O(EBA)$

$$EOB + BOA > EOA;$$

d. h.: In jeder Ecke ist die Summe zweier Seiten 118. grösser als die dritte.

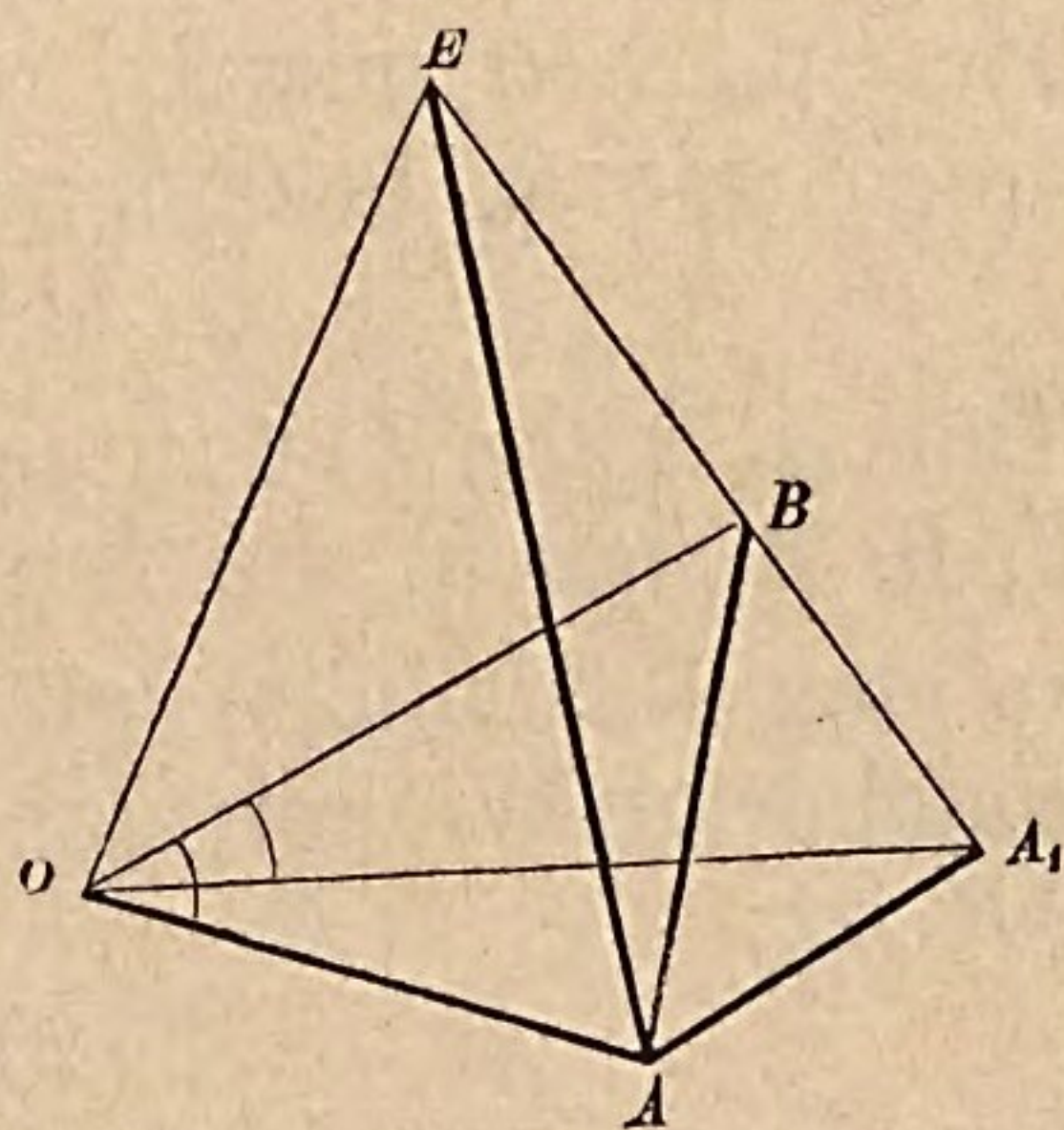
Aus der letzten Beziehung folgt:

$$EOA - EOB < BOA;$$

d. h.: In jeder Ecke ist die Differenz zweier Seiten 119. kleiner als die dritte.

Aus 118 folgt, dass die Drehung von  $OA$  durch  $OE$  nach  $OB$  grösser ist, als die ebene Drehung von  $OA$  nach  $OB$ . Daraus folgt weiter, dass eine Reihe von ebenen Drehungen, welche  $OA$  durch Zwischenrichtungen hindurch bis  $OB$  macht, grösser ist, als die direkte ebene Drehung von  $OA$  nach  $OB$ . Und da hieran nichts geändert wird, wenn die Seite der Drehung sich

Fig. 22.





beständig ändert, d. h. wenn  $OA$  eine beliebige Kegelfläche beschreibt, so folgt weiter:

120. Unter allen Drehungen zwischen zwei sich schneidenden Geraden ist die ebene Drehung die kürzeste. (Vgl. T. II, Nr. 73.)

Wenn, wie früher, die Seiten einer Ecke durch  $a, b, c$ , die Winkel ihrer Polarecke durch  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  bezeichnet werden, so ist nach 118

$$a + b > c;$$

daher, wenn man 110 benutzt:

$$2R - \alpha_1 + 2R - \beta_1 > 2R - \gamma_1$$

oder

$$\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 < 2R;$$

121. d. h.: In jeder Ecke ist die Summe zweier Winkel, vermindert um den dritten, kleiner als  $2R$ .

Betrachten wir in Fig. 22 die Dreiecke  $\overline{OAB}$ ,  $\overline{OBE}$ ,  $\overline{OEA}$ , welche  $O$  als gemeinsame Spitze haben, so ist die Summe aller ihrer Winkel  $6R$ ; also, wenn wir die Summe der 3 Winkel an der Spitze  $O$  mit  $S_1$ , die Summe der 6 Winkel an den Basislinien mit  $S_2$  bezeichnen:

$$1) S_1 + S_2 = 6R.$$

Nun ist nach 118 in jeder der drei Ecken, welche die Scheitel  $E, B, A$  haben, die Summe zweier der eben genannten Winkel an den Basislinien grösser als der dritte, dem Dreieck  $\overline{EBA}$  angehörige Winkel; daher, weil die Winkelsumme dieses Dreiecks  $2R$  ist:

$$2) S_2 > 2R.$$

Aus 1) und 2) folgt

$$3) S_1 < 4R;$$

122. d. h.: Die Summe der drei Seiten einer Ecke ist grösser als 0 und kleiner als  $4R$ .

Anm. Aus 122 folgt: Die Summe der konkaven Winkel, welche die Schenkel eines Winkels mit einer aus seinem Scheitel gezogenen Strecke bilden, ist am grössten, wenn die Strecke in der Ebene des Winkels, aber ausserhalb, und am kleinsten, wenn sie in der Ebene des Winkels, aber innerhalb desselben liegt. — Die Ecke geht in eine Gerade über, wenn die Summe ihrer Seiten 0, und in eine Ebene, wenn die Summe ihrer Seiten  $4R$  ist.

Aus  $a + b + c > 0$  folgt

$$2R - \alpha_1 + 2R - \beta_1 + 2R - \gamma_1 > 0,$$

oder

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 < 6R.$$



Aus  $a + b + c < 4R$  folgt:

$$2R - \alpha_1 + 2R - \beta_1 + 2R - \gamma_1 < 4R,$$

oder

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 > 2R;$$

d. h.: Die Summe der drei Winkel einer Ecke ist 123. grösser als  $2R$  und kleiner als  $6R$ .

**37. Die rechte Ecke und ihre Polarecke.** — Sind die Seiten einer Ecke gleich  $R$ , so sind auch ihre Winkel gleich  $R$  (52); also sind auch die Winkel und Seiten ihrer Polarecke gleich  $R$ ; d. h.:

Die Polarecke einer rechten Ecke ist ebenfalls eine rechte Ecke.

Anm. Die Vierecke  $\overline{OAB_1C}$  u. s. w. in Fig. 20 gehen, wenn die Ecke  $O$  eine rechte wird, in Rechtecke über. Vgl. Fig. 20 mit Fig. 23.

Verbindet man den Scheitel der rechten Ecke mit dem ihrer Polarecke und mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte ( $A_1$ ) eines der Rechtecke, welche ihre Seiten bilden, so ist  $OA_1O_1 = R$ ; also

$$(1) \quad OO_1^2 = OA_1^2 + O_1A_1^2;$$

ferner  $OCA_1 = R$ ; also

$$(2) \quad OA_1^2 = OC^2 + CA_1^2;$$

(2) in (1) eingesetzt giebt:

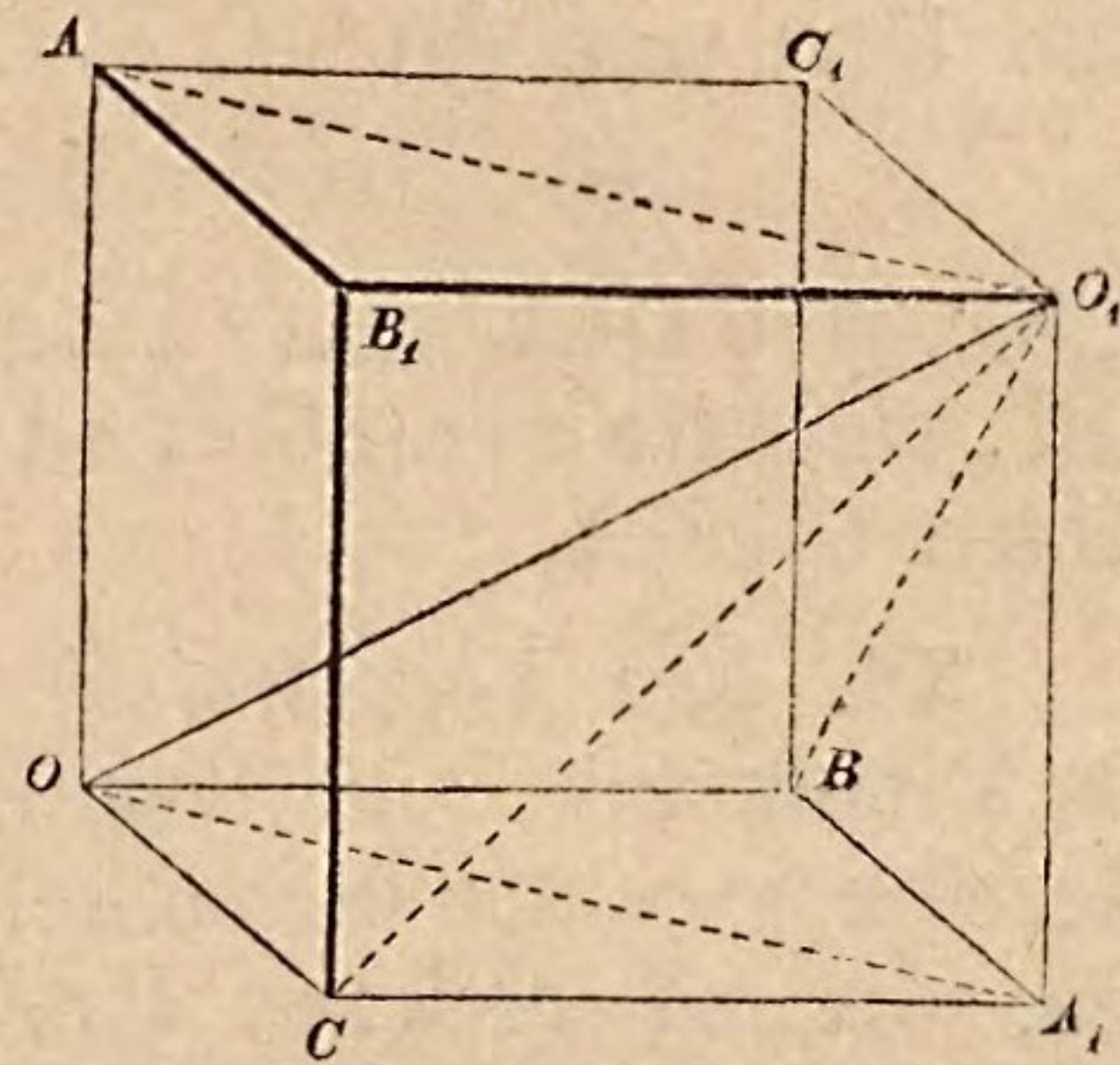
$$(3) \quad OO_1^2 = OC^2 + CA_1^2 + O_1A_1^2,$$

oder, da  $CA_1 = OB$  und  $O_1A_1 = C_1B = AO$  ist:

$$(4) \quad OO_1^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2;$$

d. h.: Verbindet man den Scheitel einer rechten Ecke mit demjenigen ihrer Polarecke, so ist das Quadrat dieser Verbindungsstrecke gleich der Summe der Quadrate der drei Kanten der Ecke, die letzteren gerechnet bis zum Durchschnitt mit den Seiten der Polarecke. Anders ausgedrückt: Das Quadrat einer beliebigen aus dem Scheitel einer rechten Ecke gezogenen Strecke ist gleich der Summe der Quadrate ihrer Projektionen auf die Kanten der Ecke.

Fig. 23.



124.



Aus Formel (4) folgt:

$$(5) \left( \frac{OA}{OO_1} \right)^2 + \left( \frac{OB}{OO_1} \right)^2 + \left( \frac{OC}{OO_1} \right)^2 = 1.$$

Setzt man nun  $AOO_1 = \alpha$ ,  $BOO_1 = \beta$ ,  $COO_1 = \gamma$ ,  
so ist

$$\frac{OA}{OO_1} = \cos \alpha; \quad \frac{OB}{OO_1} = \cos \beta; \quad \frac{OC}{OO_1} = \cos \gamma;$$

also folgt aus (5)

$$(6) \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1;$$

126. d. h.: Die Quadratsumme der Cosinus derjenigen Winkel, welche eine Gerade mit den Kanten einer rechten Ecke bildet, ist 1.

**38. Das Kugeldreieck.** — Ist aus dem Scheitel einer Ecke als Mittelpunkt eine Kugelfläche beschrieben (Fig. 18), so wird dieselbe von den Schenkelebenen der Ecke in Bogen geschnitten, die zu gleichen Kreislinien gehören (82), sich also wie die zugehörigen Centriwinkel, d. h. wie die Seiten der Ecke, verhalten. Man kann hiernach diese Bogen als Masse für die Seiten der Ecke betrachten und ebenso wie diese bezeichnen.

Der von den Bogen dreier Diametralkreise begrenzte Teil der Kugelfläche ( $\overline{ABC}$ ) heisst ein Kugeldreieck, die Bogen selbst heissen Seiten des Dreiecks, die Winkel zwischen den in den Ecken des Dreiecks an die Seiten desselben gezogenen Tangenten heissen Winkel des Dreiecks.

Da diese Tangenten die in den Schenkelebenen auf ihren Axen errichteten Senkrechten sind, so sind die Winkel der Tangenten die Neigungswinkel dieser Schenkelebenen, d. h. sie sind den Winkeln der Ecke gleich:

Hiernach liefert jeder Satz über die dreiseitige Ecke einen Satz über das Kugeldreieck, wenn man darin „Ecke“ durch „Kugeldreieck“ ersetzt.

Anm. Wie lauten in dieser Form die Sätze 100—123? — Der Polarecke entspricht ein Polardreieck, welches man auf derselben Kugelfläche erhält, wenn man im Kugelmittelpunkte auf den Schenkelebenen der Ecke Senkrechten errichtet.

Rückt der Mittelpunkt der Kugelfläche auf der Verlängerung eines Radius  $OA$ , dessen Endpunkt  $A$  fest bleibt, in unendliche Entfernung, so geht die Kugelfläche in eine Ebene über, welche in  $A$  auf  $OA$  senkrecht steht (96). Alle Diametralkreise verwandeln sich, da ihr gemeinsamer Mittelpunkt



in unendliche Entfernung gerückt ist, in gerade Linien dieser Ebene, und das Kugeldreieck geht daher in ein ebenes Dreieck über. Im allgemeinen liefert daher jeder Satz über das Kugeldreieck einen Satz über das ebene Dreieck. In diesem Umstande findet denn auch die Analogie zwischen den Sätzen über die dreiseitige Ecke und denen über das ebene Dreieck ihre Erklärung.

Anm. Bei der letzterwähnten Uebertragung gehen die Begriffe „Polardreieck“ und „Supplementseite“ verloren, und die Summe der Winkel des Dreiecks erhält eine feste Grösse. (Letzteres hat folgenden Grund: Alle Ecken mit paarweise parallelen Kanten sind kongruent, haben also dieselbe Winkelsumme. Jede Kante ist nicht nur der Richtung, sondern durch den Scheitel der zugehörigen Ecke auch der Lage nach bestimmt. Rücken diese Scheitel in unendliche Entfernung, so werden die drei Kanten jeder Ecke zu einander und zu denen der übrigen Ecken parallel, und die Lage jeder Kante wird unbestimmt, weil alle parallelen Geraden durch denselben unendlich fernen Punkt gehen. Demnach haben alle Ecken mit drei parallelen Kanten dieselbe Winkelsumme, welche Lage die Kanten auch gegen einander haben, und ebenso alle diesen Ecken entsprechenden ebenen Dreiecke.) — Von den beiden ersten Bedingungen des Satzes 106:  $b > a$  und  $a + b < 2R$  verschwindet daher die zweite, und die beiden letzten werden gleichfalls hinfällig, weil sie aus der Substitution  $2R - a$  für  $a$  stammen. Es gehen ferner die Sätze in Nr. 34 und 35 verloren, bis auf 113 und 114 (letzterer ohne Bedingung), weil durch zwei Winkel jetzt auch der dritte bekannt ist, also das Dreieck nicht nur durch drei Winkel, sondern noch durch eine Seite bestimmt ist. Es fallen ferner 121 und 122 weg (ersterer auch als selbstverständlich), und 123 wird durch den bekannten Satz von der Winkelsumme des Dreiecks ersetzt.

Die Sätze über das Kugeldreieck bilden die Grundlage zu einer Geometrie der Kugelfläche, bei welcher statt der geraden Linien der Ebene Diametralkreise, statt der Punkte und Kreislinien wieder Punkte und Kreislinien, statt der ebenen Figuren solche auf der Kugelfläche auftreten. Es fehlt der unendlich ferne Punkt und in Folge dessen der Begriff der Verschiebung; dagegen ist die Kugelfläche wie die Ebene ein freies Gebiet (vgl. T. II, Nr. 12).

Anm. Man suche Sätze der Geometrie der Kugelfläche, welche Sätzen der Geometrie der Ebene entsprechen.

Schneiden sich mehr als drei Ebenen in Geraden, welche durch denselben Punkt gehen, so entsteht die vielseitige Ecke.

γ) Drei- (und mehr)malige Bewegung der Ebene.

**39. Vorbemerkungen.** — Unter den zahlreichen Beziehungen, welche zwischen vier im Raume gegebenen Ebenen stattfinden können, ist nur die eine bemerkenswert, dass je drei



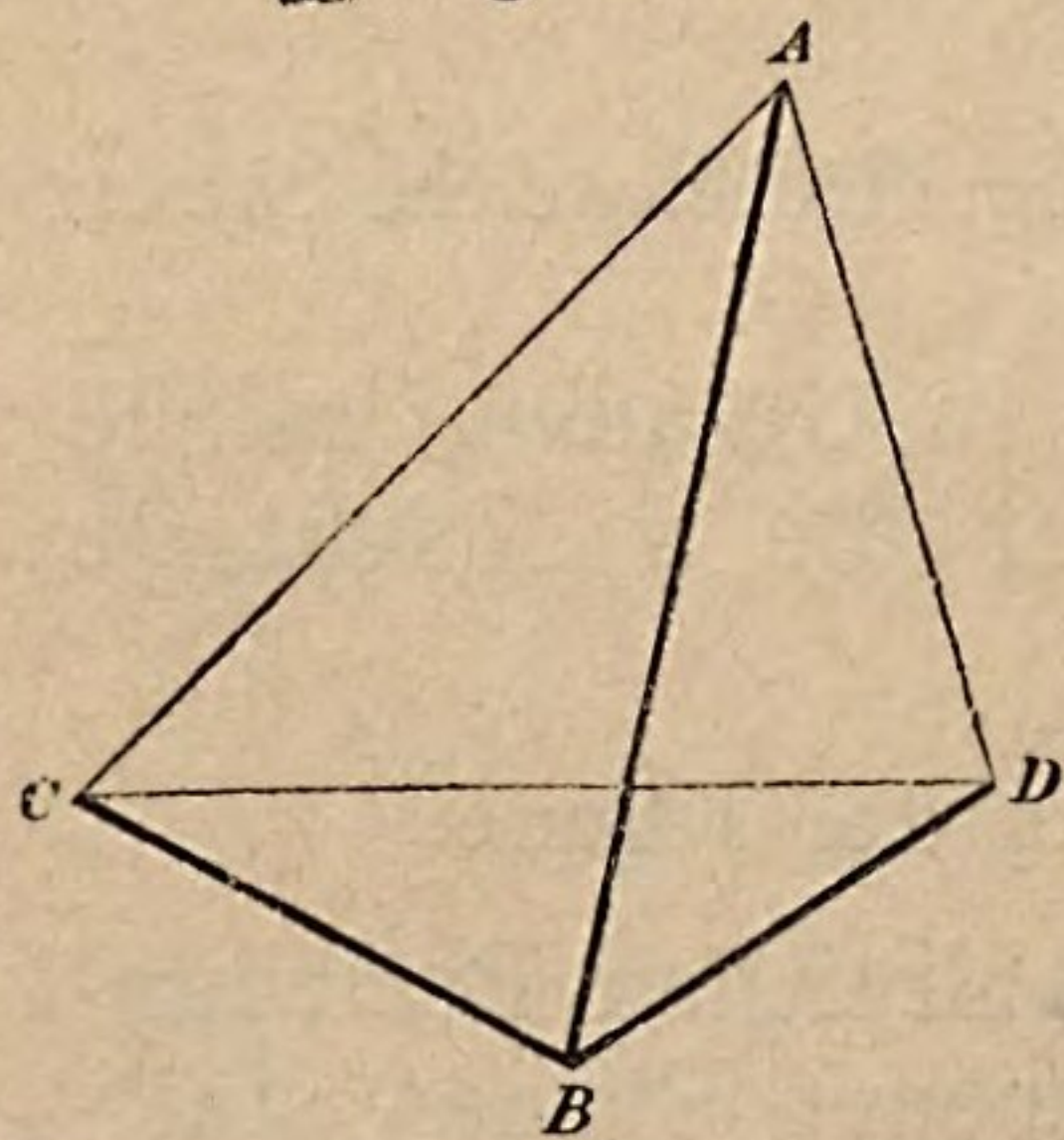
Ebenen eine Ecke bilden. Dies findet statt, wenn zu den drei Ebenen einer dreiseitigen Ecke eine vierte tritt, welche die drei übrigen in drei Seitenlinien eines Dreiecks schneidet. Wie das offene Ebenenstück zwischen den Schenkeln eines Winkels durch das Hinzutreten einer dritten Geraden sich zu einer Figur schliesst, so auch das offene Raumstück zwischen den Schenkelebenen einer Ecke durch das Hinzutreten jener vierten Ebene zu einem Körper.

Anm. Man stelle mit Hilfe von Fig. 16 die übrigen Beziehungen zwischen vier Ebenen des Raumes auf.

#### a) Das Tetraeder.

**40. Definitionen.** — Vier Ebenen, die sich in vier Punkten schneiden, begrenzen vollständig einen Teil des Raumes, bilden also einen Körper, welcher Tetraeder heisst. Die vier Punkte heissen Eckpunkte des Tetraeders. Die zwischen je drei Punkten liegenden Dreiecke, welche die Grenzen des Tetraederraumes bilden, heissen Seiten(flächen), die zwischen je zwei Punkten liegenden Strecken, welche die Seiten der Dreiecke bilden, heissen Kanten des Tetraeders. An jedem Eckpunkte heisst diejenige Ecke, deren Schenkelebenen Seiten des Tetraeders sind (die also innerhalb des Tetraederraumes liegt) Ecke des Tetraeders. An jeder Kante heisst derjenige Raumwinkel, dessen Schenkelebenen Seiten des Tetraeders sind (der also innerhalb des Tetraederraumes liegt) Winkel des Tetraeders. Ein Tetraeder hat also vier Seiten, sechs Kanten, sechs Raumwinkel und vier Ecken. — In bezug auf eine Seite des Tetraeders heissen diejenigen drei Ecken, deren Scheitel die Eckpunkte dieser Seite sind, anliegende Ecken; die vierte heisst die der Seite gegenüberliegende Ecke. — In bezug auf

Fig. 24.



eine Ecke heissen die drei Seiten, welche ihre Schenkelebenen bilden, die einschliessenden Seiten, die vierte heisst die der Ecke gegenüberliegende Seite. — Es liegen sich also im Tetraeder gegenseitig je eine Ecke und eine Seite gegenüber.

Sind  $A, B, C, D$  die Eckpunkte des Tetraeders, so bezeichnet man das Tetraeder selbst durch  $\overline{ABCD}$ .

Die Bezeichnung der Seiten eines Tetraeders geschieht auch durch kleine deutsche Buchstaben,

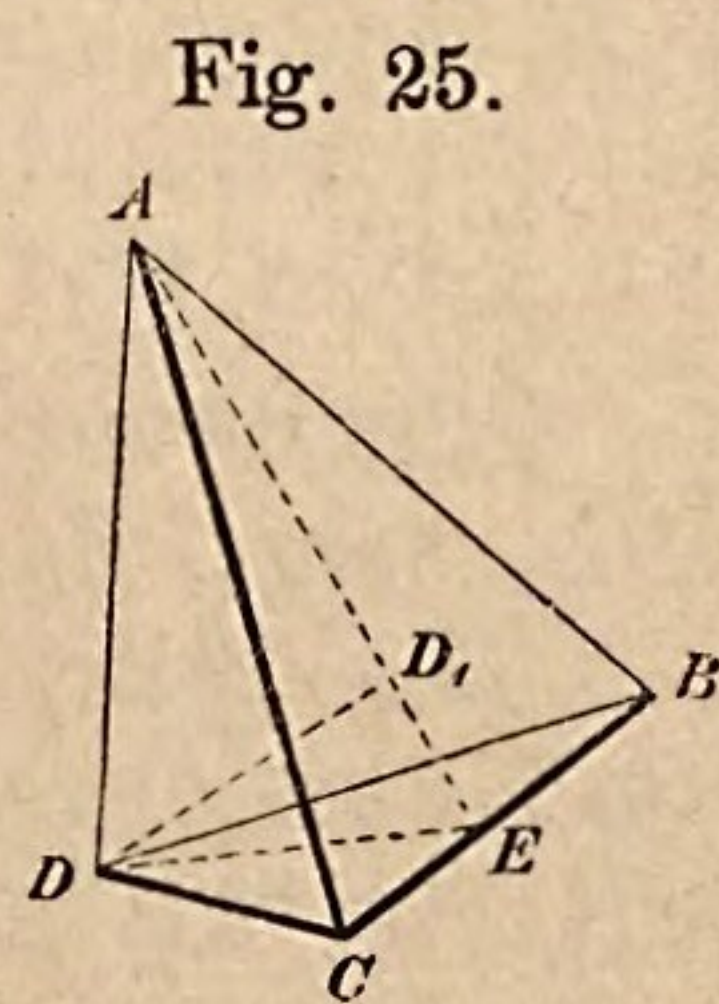


so dass jede Seite den der gegenüberliegenden Ecke entsprechenden Buchstaben erhält. Also:  $\overline{BCD} = a$ ,  $\overline{CDA} = b$ ,  $\overline{DAB} = c$ ,  $\overline{ABC} = d$ . — Die sechs Winkel können entweder durch ihre Scheitellinien oder durch ihre Schenkelebenen bezeichnet werden. Also:  $\overline{AB} = (cd)$ ;  $\overline{BC} = (ad)$ ;  $\overline{CA} = (bd)$ ;  $\overline{AD} = (bc)$ ;  $\overline{BD} = (ca)$ ;  $\overline{CD} = (ab)$ . — Die vier Ecken können entweder durch ihre Scheitel oder durch ihre Schenkelebenen bezeichnet werden. Also:  $\overline{A} = (bcd)$ ;  $\overline{B} = (cda)$ ;  $\overline{C} = (dab)$ ;  $\overline{D} = (abc)$ .

Anm. Welches sind hiernach z. B. die der Seite  $\overline{ABC}$  anliegenden Ecken, oder die Seiten, welche die Ecke  $\overline{A}$  einschliessen? Welche Kantenpaare sind windschief?

**41. Das rechteckige Tetraeder.** — Stehen drei Ebenen ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) eines Tetraeders auf einander senkrecht, so bilden sie eine rechte Ecke, und das Tetraeder heisst ein rechteckiges.

Die drei rechtwinkligen Dreiecke, welche die Schenkelebenen der rechten Ecke bilden, heissen Kathetenseiten, die dieser Ecke gegenüberliegende Seite Hypotenusenseite des rechteckigen Tetraeders. Legt man durch eine Kante ( $AD$ ) der rechten Ecke die Ebene  $\overline{AED} \perp BC$ , so ist  $AE \perp BC$  und  $DE \perp BC$  (50); also ist  $\angle AED$  der Neigungswinkel des Raumwinkels der Ebenen  $\beta$  und  $\alpha$ . Da  $AD \perp DE$ ,



so ist  $\angle ADE$  rechtwinklig, also  $\angle AED$  ein spitzer Winkel. Hieraus folgt:

Im rechteckigen Tetraeder sind die drei der Hypotenusenseite anliegenden Winkel spitz. 127.

Bestimmt man den Inhalt der Dreiecke  $\overline{ABC}$  und  $\overline{DBC}$ , so findet sich

$$\overline{ABC} = \frac{BC \cdot AE}{2}; \quad \overline{DBC} = \frac{BC \cdot DE}{2}.$$

Nun ist  $DE = AE \cdot \cos \angle AED$ ;

folglich  $\overline{DBC} = \overline{ABC} \cdot \cos \angle AED$ ;

d. h.: Jede Kathetenseite eines rechteckigen Tetraeders ist gleich dem Produkt aus der Hypotenusenseite und dem Cosinus des zwischen ihnen liegenden Winkels. 128.

Unter der Projektion einer geradlinigen Figur auf eine



Ebene versteht man die Figur zwischen den Projektionen ihrer Eckpunkte. Demnach kann man sagen:

129. Jede Kathetenseite eines rechteckigen Tetraeders ist die Projektion der Hypotenusenseite auf die durch die Kathetenseite bestimmte Ebene.

130. Jede Projektion einer geradlinigen Figur ist an Flächeninhalt gleich der Figur, multipliziert mit dem Cosinus des zwischen den Ebenen beider Figuren liegenden Winkels.

Fällt man  $DD_1 \perp ABC$ , so liegt  $DD_1$  in der Ebene  $ADE$  (55) und aus gleichem Grunde in den durch  $DC \perp AB$  und durch  $DB \perp AC$  gelegten Ebenen, ist also der Durchschnitt dieser Ebenen; d. h.:

131. Legt man durch die drei Kanten der rechten Ecke eines rechteckigen Tetraeders Ebenen senkrecht zu den Gegenkanten, so schneiden sich diese Ebenen in der Senkrechten, welche aus dem Scheitel der rechten Ecke auf die Gegenseite gefällt werden kann.

Da ferner aus der Aehnlichkeit der Dreiecke  $\overline{ADD_1}$  und  $\overline{EDD_1}$  folgt, dass  $\overline{AED} = \overline{ADD_1}$  ist, so folgt weiter:

132. Die Winkel, welche die aus dem Scheitel der rechten Ecke eines rechteckigen Tetraeders auf die Gegenseite gefällte Senkrechte mit den Kanten der rechten Ecke bildet, sind gleich den an den Gegenkanten liegenden Winkeln des Tetraeders.

Setzt man  $D_1DA = \alpha$ ,  $D_1DB = \beta$ ,  $D_1DC = \gamma$ , so ist also (nach 132 und 128)

$$\overline{DAB} = \overline{ABC} \cdot \cos \gamma; \quad \overline{DBC} = \overline{ABC} \cdot \cos \alpha; \quad \overline{DCA} = \overline{ABC} \cdot \cos \beta.$$

Addirt man diese Gleichungen, nachdem man sie ins Quadrat erhoben, \*) so folgt:

$$\overline{DAB}^2 + \overline{DBC}^2 + \overline{DCA}^2 = \overline{ABC}^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

oder, mit Berücksichtigung von 126:

$$\overline{DAB}^2 + \overline{DBC}^2 + \overline{DCA}^2 = \overline{ABC}^2;$$

133. d. h.: Im rechteckigen Tetraeder ist das Quadrat der Hypotenusenseite gleich der Summe der Quadrate der Kathetenseiten.

\*) Es wird hierbei angenommen, dass die vier Seiten des Tetraeders durch ein gemeinsames Mass gemessen seien, und dass  $\overline{DAB}$  etc. die Masszahlen bedeuten.



Anm. Dieser, dem pythagoräischen Satze der Geometrie entsprechende Satz hat natürlich nur algebraische Bedeutung.

**42. Beziehungen zwischen den Ecken eines Tetraeders.** — Wie unter allen geradlinigen Figuren das Dreieck die geringste Zahl der Strecken zu seiner Begrenzung erfordert, so unter allen ebenflächigen Körpern das Tetraeder die geringste Zahl der Ebenen. Den drei Seiten des Dreiecks entsprechen die vier Seiten, den drei Winkeln des Dreiecks die vier Ecken des Tetraeders. — Beziehungen zwischen den Ecken des Tetraeders (entsprechend T. II, Nr. 61 und 62) können darum hier nicht aufgestellt werden, weil die Ecke nicht, wie der Winkel, durch eine einmalige, sondern durch eine zweimalige Drehung entsteht, ihre Grösse also, wie oben (Nr. 29) bemerkt, nicht direkt, sondern nur mit Hilfe einer Kugelfläche bestimmt werden kann.

Anm. Setzt man die Summe der Ecken eines Tetraeders gleich  $x$ , und legt durch einen Punkt  $X$  innerhalb des Tetraeders und durch jede Kante eine Ebene, so zerfällt das gegebene Tetraeder in vier neue Tetraeder, deren Ecken (bis auf diejenigen mit dem Scheitel  $X$ ) zusammen gleich den Ecken des gegebenen sind. Wäre nun die Summe der vier Ecken in allen Tetraedern gleich, so würde man (vgl. erste Anm. in Nr. 29) erhalten:  $4x = x + 4\pi$ ;  $x = \frac{4}{3}\pi$ . — Legt man nur durch eine Kante  $AD$  (Fig. 25) eine Ebene  $\overline{ADE}$ , welche das Tetraeder in zwei Teile teilt, so ist die Summe der Ecken dieser letzteren (bis auf diejenigen mit dem Scheitel  $E$ ) gleich der Summe der Ecken des gegebenen. Bezeichnet man die Summe der beiden Nebenecken mit dem Scheitel  $E$  mit  $y$ , so würde nach der vorigen Annahme sein:  $2x = x + y$ , oder  $x = y$ . Nun ist aber  $y$  eine veränderliche Grösse (98a), also auch  $x$ . Demnach hat die Summe der Ecken eines Tetraeders überhaupt keinen festen Wert. — Wie lässt sich, unter der Voraussetzung, dass die Winkelsumme eines Dreiecks einen festen Wert hat, durch zwei analoge Methoden beweisen, dass diese Summe  $2R$  ist?

Eine beliebige Anzahl von Ebenen bildet in jeder Aufeinanderfolge einen Körper, welcher Polyeder genannt wird, und zwar konkaves Polyeder, wenn alle seine Ecken konkav sind.

Da jede Seite eines Polyeders von einer Anzahl Kanten, jede Kante von zwei Eckpunkten begrenzt ist, so lässt sich annehmen, dass zwischen der Zahl der Seiten, Kanten und Eckpunkte eines Polyeders eine analoge Beziehung besteht, wie zwischen der Zahl der Seiten und Ecken eines Polygons (T. II, 82). — Zerlegt man nun jede Seite des Polyeders, die im allgemeinen ein Polygon ist, durch Diagonalen von einem Eckpunkte aus in Dreiecke, und legt durch einen beliebigen Punkt im Innern des Polyeders und durch sämtliche Kanten und Diagonalen Ebenen, so zerfällt das Polyeder in lauter Tetraeder.



Umgekehrt lässt sich jedes Polyeder aus Tetraedern zusammensetzen. — Bezeichnen wir nun die Zahl der Seiten eines Polyeders mit  $s$ , die Zahl seiner Kanten mit  $k$ , die Zahl seiner Eckpunkte mit  $e$ , so ist für das Tetraeder

$$s = 4, k = 6, e = 4;$$

$$\text{also (1) } e + s - k = 2.$$

Angenommen, diese Formel gelte für ein aus  $n$  Tetraedern zusammengesetztes Polyeder. Wenn sich dann zeigen lässt, dass sie auch noch für dasjenige Polyeder gilt, welches aus dem vorigen durch Hinzufügung eines neuen Tetraeders entsteht, so gilt sie allgemein. Denn sie gilt, wie bereits gefunden, für das Tetraeder, also, wenn jener Satz bewiesen ist, für das aus 2, 3 .. Tetraedern zusammengesetzte, d. h. für jedes Polyeder.

Fügt man nun einem Polyeder ein Tetraeder hinzu, so fallen drei Eckpunkte und drei Kanten des letzteren mit drei Eckpunkten und drei Kanten des ersteren zusammen. Das Tetraeder liefert also nur einen neuen Eckpunkt und drei neue Kanten. Ausserdem fällt eine Seite des Tetraeders mit einer Seite des Polyeders zusammen, und diese beiden fallen nun in das Innere des neuen Körpers, zählen also als Seiten nicht mehr mit. Demnach verliert das Polyeder eine Seite und erhält drei neue Seiten, gewinnt also im ganzen zwei Seiten. Die Zahl seiner Eckpunkte, Seiten und Kanten ist demnach  $(e + 1)$ ,  $(s + 2)$ ,  $(k + 3)$ . Da nun

$$(2) (e + 1) + (s + 2) - (k + 3) = e + s - k = 2$$

ist, so gilt Formel (1), wenn für den aus  $n$ , so auch für den aus  $n + 1$  Tetraedern bestehenden Körper.

Fällt eine zweite Seite des Tetraeders mit einer Seite des Polyeders in dieselbe Ebene, so fällt die zwischen beiden Seiten liegende Kante aus der Zahl der Grenzkanten weg, und die Zahl der Seiten verringert sich ebenfalls um Eins, während die Zahl der Eckpunkte dieselbe bleibt. Die Zahl der Eckpunkte, Seiten und Kanten des neuen Polyeders ist demnach  $(e + 1)$ ,  $(s + 1)$ ,  $(k + 2)$ , und wiederum ist

$$(e + 1) + (s + 1) - (k + 2) = e + s - k = 2.$$

Anm. Wenn in Fig. 25  $\overline{ADCE}$  das hinzutretende Tetraeder ist, so fällt  $\overline{ADE}$  in das Innere des Körpers, ferner fällt  $\overline{AEB}$  mit  $\overline{AEC}$  und  $\overline{DEB}$  mit  $\overline{DEC}$  zusammen; also verliert das Polyeder die Seite  $\overline{AED}$  und gewinnt nur die Seite  $\overline{ACD}$ . Es verliert ferner die Kanten  $AE$  und  $DE$ , und gewinnt  $AC$  und  $DC$ , während  $CE$  mit  $BE$  zusammenfällt. Es verliert endlich den Eckpunkt  $E$  und gewinnt dafür  $C$ . Die Zahl der Seiten, Kanten



und Eckpunkte bleibt also in diesem Falle unverändert. Derselbe kann aber für den Beweis unseres Satzes übergangen werden, da er offenbar nur bei der Zerlegung eines Tetraeders in zwei neue Tetraeder in Betracht kommt, welche Zerlegung hier unnötig ist.

Hiernach gilt allgemein der Satz:

In jedem konkaven Polyeder ist die Zahl der Seiten, vermehrt um die Zahl der Eckpunkte, um Zwei grösser als die Zahl der Kanten. \*)

Anm.  $n$  Ebenen schneiden sich zu je zwei in  $n \cdot 2$  Geraden und zu je drei in  $n \cdot 3$  Punkten. (Hierbei können Geraden und Punkte zusammenfallen oder in unendliche Entfernung rücken.) Die Zahl der Ebenen, welche man durch je drei von  $n$  Punkten legen kann, beträgt ebenfalls  $n \cdot 3$ . (Hierbei können Ebenen zusammenfallen oder parallel werden.) — Entsprechend den Sternfiguren (T. II, Nr. 64, letzte Anm.) giebt es auch Sternpolyeder. (S. Nr. 87 am Ende.)

**43. Bestimmung des Tetraeders durch seine Stücke.** — Seiten und Ecken eines Tetraeders heissen seine Hauptstücke, Kanten und Winkel seine Nebenstücke. Ein Tetraeder hat also 8 Hauptstücke und 12 Nebenstücke.

Soll ein Tetraeder aus Hauptstücken konstruiert werden, so dürfen dieselben nicht ganz beliebig gegeben sein, sondern es müssen je zwei Seiten in einer Kante, je zwei Ecken in einem Winkel übereinstimmen. Endlich muss eine Seite des Tetraeders, die einer Ecke anliegen soll, einen ebenen Winkel enthalten, welcher gleich einer Seite der Ecke ist.

Die Konstruktion der Tetraeder aus Hauptstücken erfolgt durch geometrische Oerter in analoger Weise wie die Konstruktion der Dreiecke (T. II, Nr. 66 und 67). Man erhält die Sätze:

Ist zu einem Tetraeder eine Seite ( $\overline{BCD}$ , Fig. 24) 135. und eine anliegende Ecke ( $\overline{C}$ ) gegeben, so ist der geometrische Ort des vierten Eckpunktes die dritte Kante ( $CA$ ) der in  $C$  an  $\overline{BCD}$  angetragenen Ecke. — (a $\overline{C}$ )

Sind zu einem Tetraeder zwei Seiten ( $\overline{BCD}$  und  $\overline{BCA}$ ) 136. gegeben, so ist der geometrische Ort des vierten Eckpunktes die Kreislinie, welche  $A$  beschreibt, wenn die Seite  $\overline{BCA}$  sich um die Kante  $BC$  dreht. — (ab)

\*) Nach Euler (1707—83), dem Urheber dieses Satzes, heissen konkave Polyeder auch Euler'sche Polyeder. — Für andere Polyeder gilt der Satz nicht. Setzt man z. B. einen kleineren Würfel so auf einen grösseren, dass die Kanten beider sich nicht berühren, so ist für den Gesamtkörper  $e = 16$ ,  $k = 24$ ,  $s = 11$ , also  $e + s - k = 3$ .



137. Zur Bestimmung eines Tetraeders sind drei seiner Hauptstücke (unter denen wenigstens eine Seite sein muss) notwendig und hinreichend.

Fig. 26.

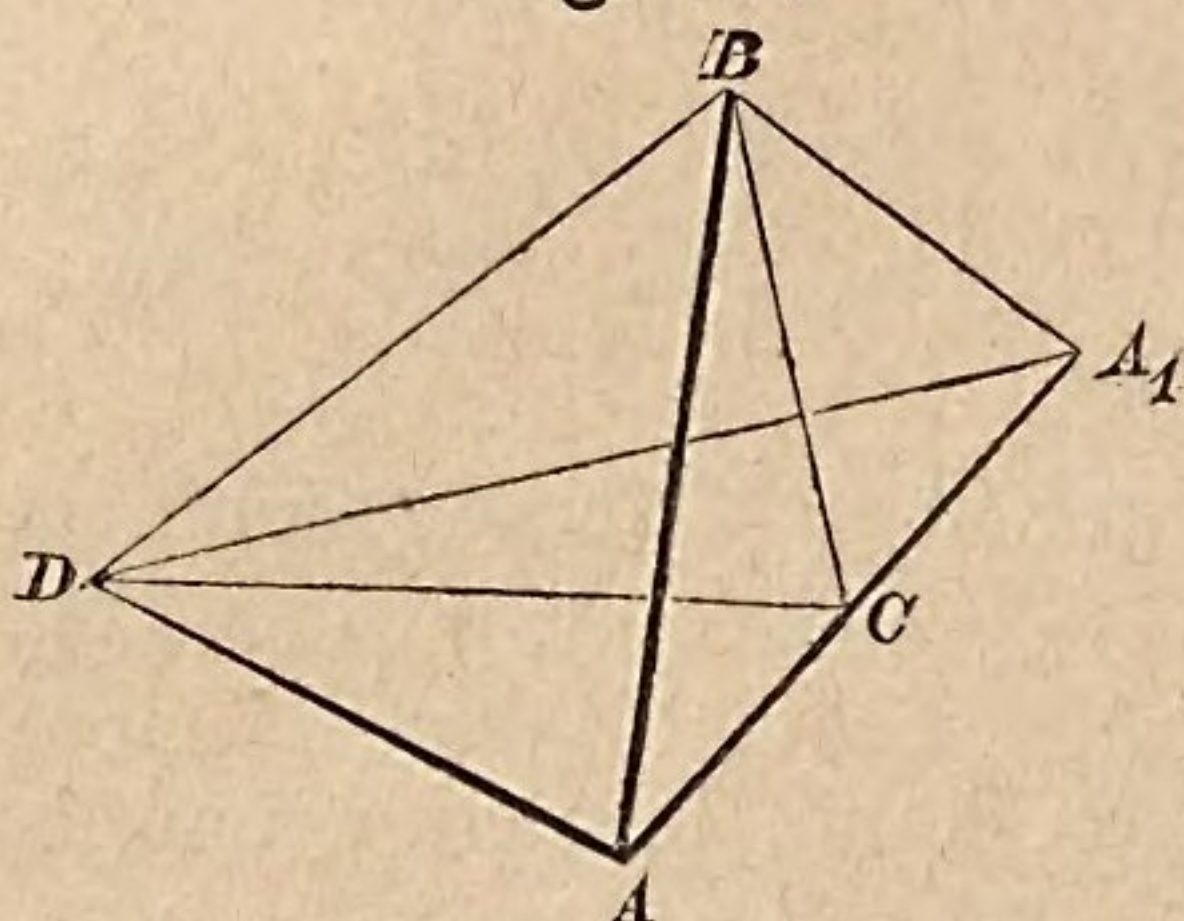
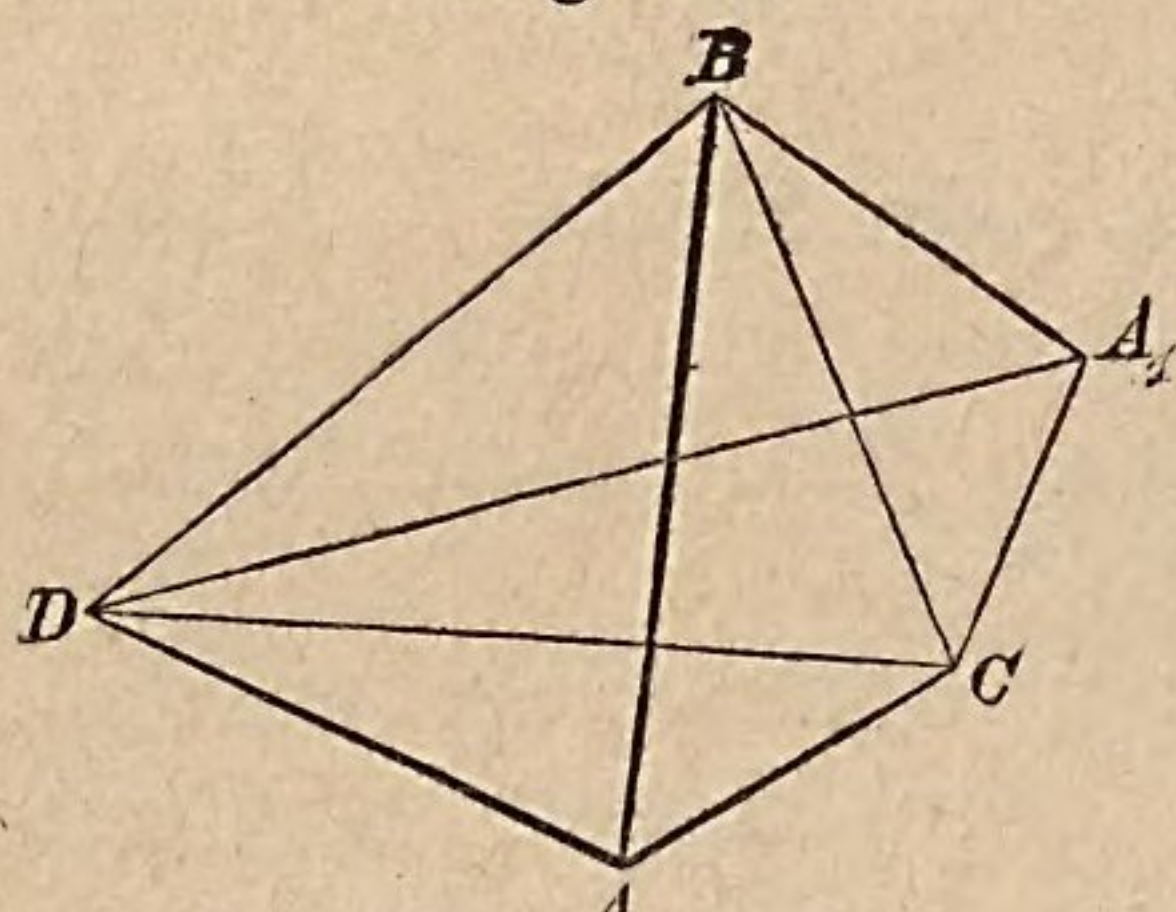


Fig. 27.



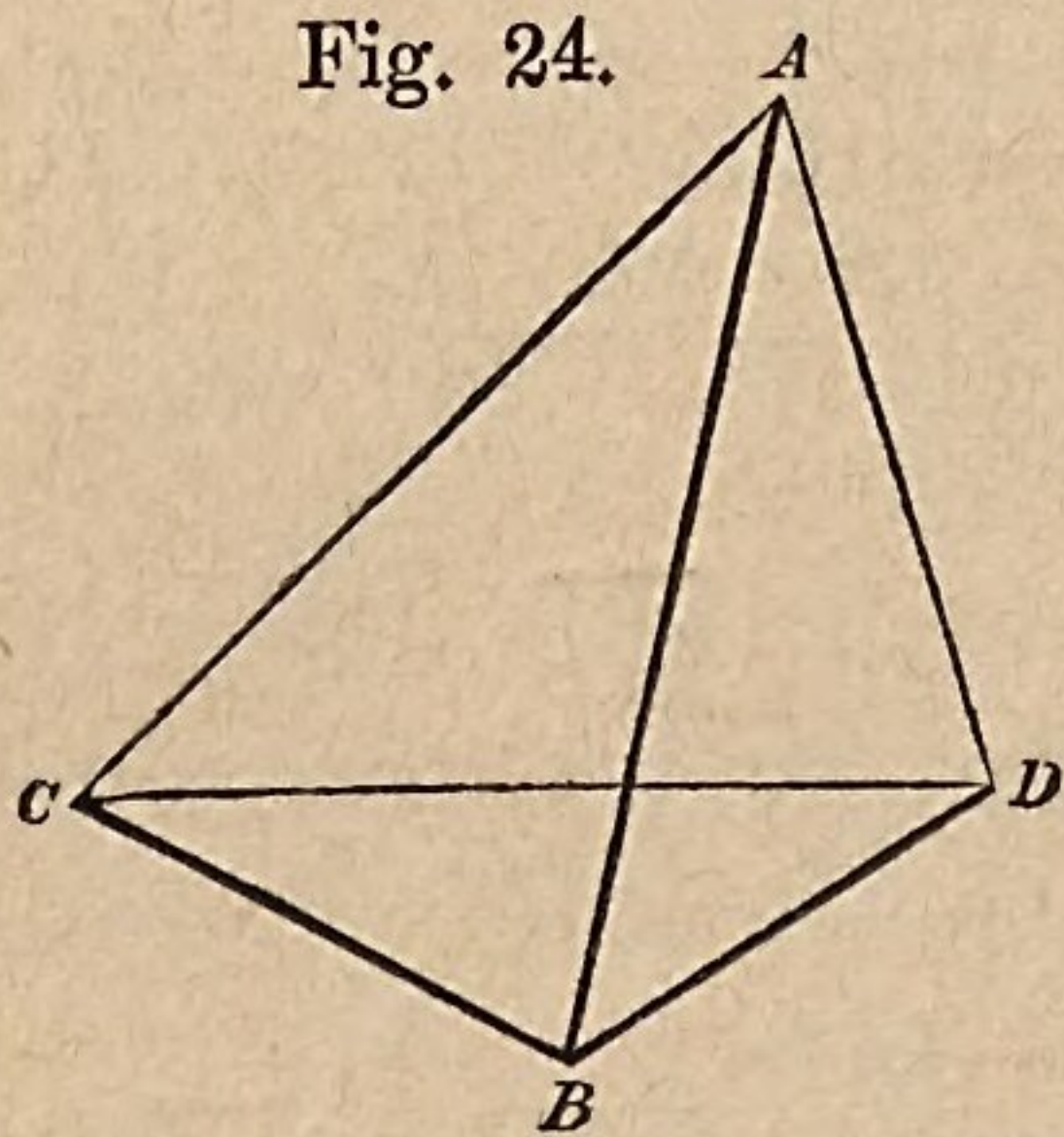
Anm. Man untersuche die einzelnen Fälle der Bestimmung eines Tetraeders durch seine Hauptstücke, analog mit T. II, Nr. 67.

Trägt man an ein Dreieck  $\overline{BCD}$  (Fig. 26) nach beiden Seiten in  $B$  die Ecke  $\bar{B}$ , in  $D$  die Ecke  $\bar{D}$  an, so erhält man zwei symmetrische Tetraeder  $\overline{ABCD}$  und  $\overline{A_1BCD}$ .

Ist der Winkel  $\overline{DC}$  ein rechter, so liegen  $\overline{DCA}$  und  $\overline{DCA_1}$  in derselben Ebene. Ist ausserdem  $\overline{BC}$  ein rechter Winkel, so liegen auch  $\overline{BCA}$  und  $\overline{BCA_1}$  in derselben Ebene, und der aus den beiden Tetraedern bestehende Körper geht in ein Tetraeder über, in welchem  $\overline{BDA} \cong \overline{BDA_1}$  ist.

44. Beziehungen zwischen den Ecken und Seiten eines Tetraeders. — Ein Tetraeder heisst gleichschenkelig, wenn zwei;

Fig. 24.



gleichseitig, wenn drei; regelmässig, wenn alle vier Seiten einander symmetrisch kongruent sind.

Ist  $\overline{ACB} \cong \overline{ACD}$  (Fig. 24), so ist  $\overline{AB} = \overline{AD}$ , und  $\overline{CB} = \overline{CD}$ ; d. h.:  $\overline{ABD}$  und  $\overline{CBD}$  sind gleichschenkelige Dreiecke. Also:

138.

Im gleichschenkligen Tetraeder sind die nichtkongruenten Seiten gleichschenkelige Dreiecke.

Ist ausserdem  $\overline{ABD} \cong \overline{ACB} \cong \overline{ADC}$ , so müssen auch  $\overline{ACD}$  und  $\overline{ACB}$  gleichschenkelig sein; und da  $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DB}$ , so ist  $\overline{BCD}$  gleichseitig; d. h.:

139.

Im gleichseitigen Tetraeder sind die kongruenten Seiten gleichschenkelige Dreiecke, während die vierte Seite ein gleichseitiges Dreieck ist.

Ist ausserdem  $\overline{BCD} \cong \overline{ABD} \cong \overline{ACB} \cong \overline{ADC}$ , so müssen auch die drei letzteren Dreiecke gleichseitig sein; d. h.:



Im regelmässigen Tetraeder sind alle vier Seiten 140. gleichseitige Dreiecke.

Ist  $\overline{ACB} \cong \overline{ACD}$ , so sind die Ecken  $\overline{D}$  und  $\overline{B}$  kongruent (138 und 104); d. h.:

Kongruenten Seiten eines Tetraeders liegen kon- 141. gruente Ecken gegenüber (und umgekehrt).

Anm. Hiernach sind im gleichschenkligen Tetraeder zwei, im gleichseitigen drei, im regelmässigen alle vier Ecken kongruent.

Da in Fig. 27 die Halbierungsebene des Raumwinkels  $\overline{BD}$  gleichzeitig auf  $\overline{DAA_1}$  und  $\overline{BAA_1}$  senkrecht steht, und da  $\overline{DAC} \cong \overline{DA_1C}$ ;  $\overline{BAC} \cong \overline{BA_1C}$  ist, so hat man den Satz:

Halbiert man im gleichschenkligen Tetraeder den 142. von den kongruenten Seiten eingeschlossenen Raumwinkel, so steht die Halbierungsebene auf den beiden anderen Seiten und deren gemeinsamer Kante senkrecht, und teilt jede dieser Seiten in zwei kongruente Dreiecke.

Anm. Man bilde die Umkehrungssätze, analog zu T. II, Anm. zu 99.

Folgerung: Im gleichseitigen Tetraeder schneiden 143. sich die drei Ebenen, welche die von den kongruenten Seiten eingeschlossenen Winkel halbieren, in einer Geraden, welche auf der vierten Seite in deren Mittelpunkt senkrecht steht (T. II, 201).

Anm. Man untersuche die Beziehungen zweier über demselben gleichschenkligen Dreieck errichteten gleichschenkligen, und zweier über demselben gleichseitigen Dreieck errichteten gleichseitigen Tetraeder, analog mit T. II, Nr. 70.

Fällt man in einem beliebigen Tetraeder aus einem Eckpunkte  $A$  eine Senkrechte auf die Gegenseite  $a$  und legt durch diese Senkrechte und die drei anderen Eckpunkte Ebenen, so zerfällt das Tetraeder in drei Tetraeder, und die Seite  $a$  in drei Seiten  $b_1, c_1, d_1$ , welche die Projektionen von  $b, c, d$  auf die durch  $a$  bestimmte Ebene sind. Dann ist nach 130

$$b_1 < b; c_1 < c; d_1 < d;$$

also

$$b_1 + c_1 + d_1 < b + c + d,$$

oder

$$a < b + c + d;$$

d. h.: In jedem Tetraeder ist die Summe dreier Seiten 144. grösser als die vierte.

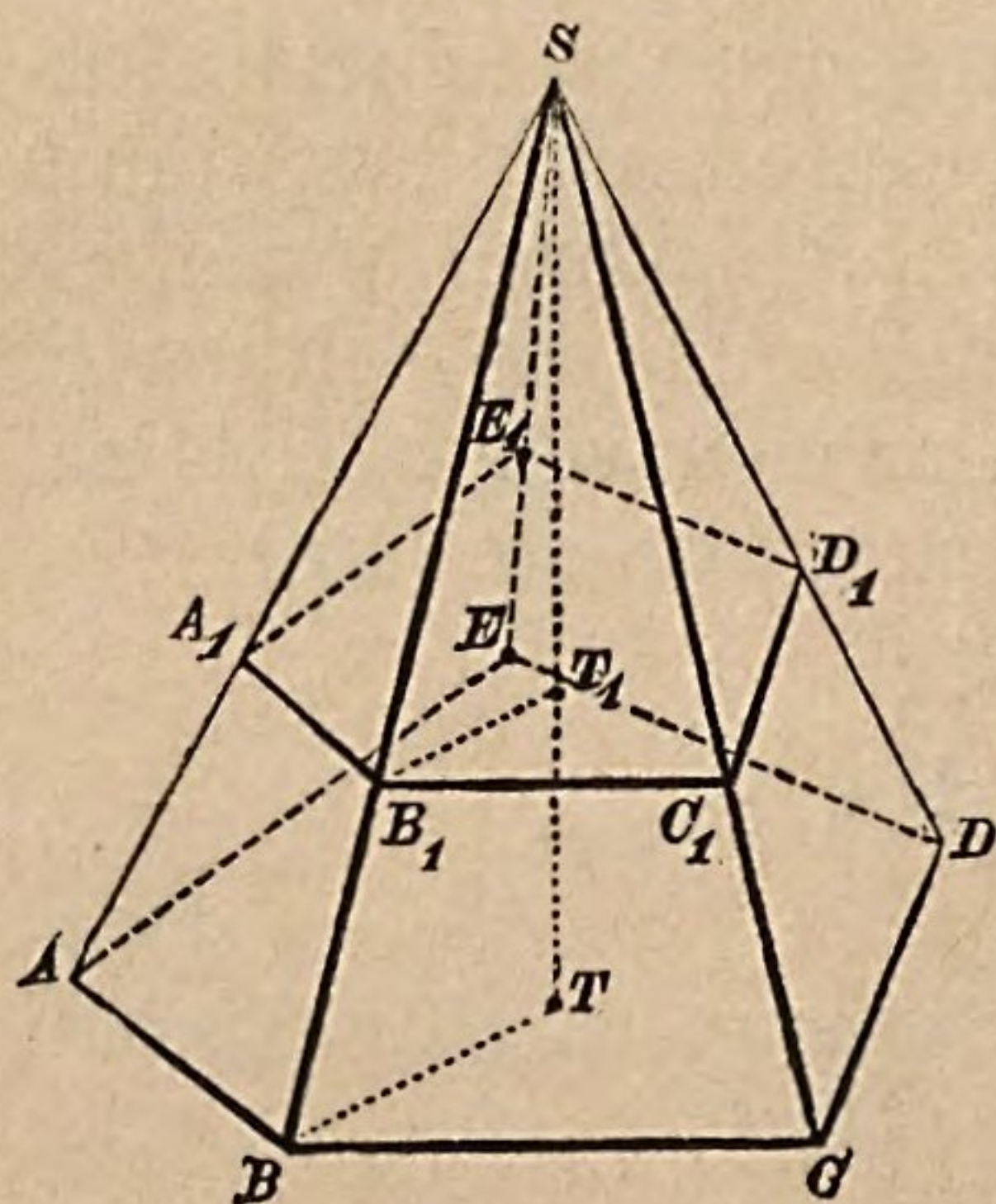
#### b) Die Pyramide.

45. *Definitionen und Eigenschaften der Pyramide.* — Wie die dreiseitige Ecke durch das Hinzutreten einer vierten Ebene



sich zu einem Körper, dem Tetraeder, schliesst, so auch die vielseitige Ecke durch das Hinzutreten einer neuen Ebene zu einem Körper, welcher Pyramide genannt wird. — Eine Pyramide ist also ein Körper, welcher begrenzt wird von Ebenen, deren Schnittlinien alle durch einen Punkt gehen, und von einer Ebene, welche alle diese Linien schneidet. — Die ersteren Ebenen heissen Seitenflächen, die letztere Grundfläche der Pyramide. Die Strecken, in welchen die Seitenflächen sich schneiden, heissen Seitenkanten, diejenigen, in welchen die Seitenflächen von der Grundfläche geschnitten werden, Grundkanten der Pyramide. Der gemeinsame Schnittpunkt der Seitenkanten heisst Spitze, die von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Senkrechte Höhe der Pyramide. Die Pyramide heisst  $n$ -seitig, wenn sie  $n$  Seitenflächen enthält. — Die Grundfläche einer  $n$ -seitigen Pyramide ist ein  $n$ -Eck, während die Seitenflächen Dreiecke sind. Jede Pyramide hat ebensoviele Seitenkanten und Grundkanten als Seitenflächen. Das Tetraeder ist eine dreiseitige Pyramide, in welcher jede Seite als Grundfläche, jeder Eckpunkt als Spitze angesehen werden kann. Eine Pyramide heisst regelmässig oder unregelmässig, je nachdem ihre Grundfläche ein regelmässiges oder unregelmässiges  $n$ -Eck ist. Eine Pyramide heisst gerade oder schief, je nachdem der Fusspunkt ihrer Höhe von allen Eckpunkten der Grundfläche gleichweit entfernt ist oder nicht. (Kombination der beiden letzten Einteilungen.)

Fig. 28.



Verbindet man den Fusspunkt der Höhe ( $T$ , Fig. 28) mit den Eckpunkten der Grundfläche, so bilden diese Verbindungslinien mit den Seitenkanten und der Höhe rechtwinklige Dreiecke (z. B.  $\triangle STB$ ), welche die Pyramide in  $n$  Tetraeder teilen. Ist die Pyramide gerade, so sind diese Dreiecke kongruent (T. II, 105), und es ist daher  $TA = TB = TC, \dots$ ; d. h.: der Fusspunkt der Höhe ist Mittelpunkt eines der Grundfläche umschriebenen Kreises. Man hat daher den Satz:

145. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Sehnenvolygon, dessen Umkreis den Fusspunkt der Höhe zum Mittelpunkt hat. (Die Seitenflächen



einer geraden Pyramide sind gleichschenklige Dreiecke.)

Anm. Welches sind hiernach die Eigenschaften der geraden regelmässigen, geraden unregelmässigen, schiefen regelmässigen, schiefen unregelmässigen Pyramide?

Aus der Kongruenz der Dreiecke  $\overline{SAT}$ ,  $\overline{SBT}$  ... folgt ferner die Gleichheit der Seiten  $SA$ ,  $SB$  ... und der Winkel  $SAT$ ,  $SBT$ , ... Da diese Winkel die Neigungswinkel der Kanten gegen die Grundfläche sind (Nr. 19), so hat man den Satz:

Die Seitenkanten einer geraden Pyramide sind 146. einander gleich und bilden mit der Grundfläche gleiche Neigungswinkel.

Aus Betrachtung der Figur 28 folgt ferner:

Unter allen Strecken, die man zwischen einem 147. Punkte und einer Ebene ziehen kann, ist die Senkrechte die kürzeste (T. II, 108).

Sind von einem Punkte nach einer Ebene (ausser 148. der Senkrechten) beliebig viele gleichlange Strecken gezogen, so haben deren Fusspunkte vom Fusspunkte der Senkrechten gleichen Abstand (und umgekehrt) (T. II, 105).

Sind von einem Punkte nach einer Ebene (ausser 149. der Senkrechten) zwei ungleiche Strecken gezogen, so hat der Fusspunkt der längeren auch den grösseren Abstand vom Fusspunkte der Senkrechten (und umgekehrt) (T. II, 118).

**46. Schnittebenen der Pyramide.** — Wie jedes Polygon, welches nur konkave Winkel enthält, durch eine Gerade in zwei Polygone, so wird auch jedes Polyeder, welches nur konkave Flächenwinkel enthält, durch eine Ebene in zwei Polyeder geteilt. Wird eine Pyramide durch eine Ebene geschnitten, so ist die Gestalt der Teile verschieden, je nachdem der Schnitt durch Spitze und Grundfläche, oder nur durch die Grundfläche, oder durch keine von beiden geführt wird.

1) Schnitt durch Spitze und Grundfläche. — Eine durch die Spitze der Pyramide gelegte Ebene schneidet die Grundfläche in einer Geraden, welche den Umfang des die Grundfläche bildenden Polygons in zwei Punkten schneidet. Die Verbindungsstrecken dieser Punkte mit der Spitze sind die Linien, in welchen zwei Seitenflächen der Pyramide von der Schnittebene geschnitten werden. Die Schnittfläche ist



hiernach ein Dreieck und die beiden Teile der Pyramide sind selbst Pyramiden. Also:

150. Eine durch Spitze und Grundfläche einer Pyramide gelegte Ebene bildet ein Dreieck als Schnittfigur und teilt die Pyramide in zwei neue Pyramiden.

2) Schnitt durch die Grundfläche. — Derselbe teilt die Pyramide in zwei Polyeder. Dasjenige von ihnen, welches die Spitze enthält, zerfällt durch einen Schnitt, welcher durch die Spitze und durch die Schnittlinie der Grundfläche geht, in zwei Pyramiden. Das andere kann hiernach als algebraische Summe dreier Pyramiden dargestellt werden.

3) Schnitt, der weder Grundfläche noch Spitze trifft. — Derselbe schneidet jede der Seitenflächen, und ist daher ein Polygon von gleicher Seitenzahl wie die Grundfläche.

Ist in Fig. 28  $\overline{ABCDE}$  die Grundfläche der Pyramide, und  $\overline{A_1B_1C_1D_1E_1}$  die Schnittfigur, so gehen die Verbindungslinien je zweier homologer Ecken beider Polygone (z. B.  $AA_1$ ) durch denselben Punkt  $S$ . Es müssen sich ferner die Verlängerungen je zweier homologer Seiten (z. B.  $AB$  und  $A_1B_1$ ) in Punkten schneiden, die den Ebenen beider Polygone gleichzeitig angehören, d. h. in Punkten, welche auf der Schnittlinie beider Ebenen liegen. Da also die beiden Polygone die Eigenschaft haben, dass die Verbindungslinien ihrer homologen Punkte alle durch einen endlich fernen Punkt gehen, und dass die Schnittpunkte ihrer homologen Seitenlinien alle auf einer endlich fernen Geraden liegen, so sind die beiden Polygone kollinear. (T. II, Nr. 107.)

Ist die Schnittebene der Grundfläche parallel, so rückt die Schnittlinie beider Ebenen in unendliche Entfernung, und die Kollinearität der beiden Polygone geht in die Aehnlichkeit über. (Dieser specielle Fall ist in Fig. 28 dargestellt.)

Anm. Die Aehnlichkeit der Polygone  $\overline{ABCDE}$  und  $\overline{A_1B_1C_1D_1E_1}$  in Fig. 28 folgt auch daraus, dass z. B.  $A_1B_1 \parallel AB$  (89); also  $\overline{SAB} \sim \overline{SA_1B_1}$ ;  $\overline{SBC} \sim \overline{SB_1C_1}$  ist, u. s. w. Hieraus folgt:  $AB:A_1B_1 = SB:SB_1 = BC:B_1C_1$  etc. Ferner folgt aus  $AB \parallel A_1B_1$  und  $BC \parallel B_1C_1$ , dass  $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$  ist, etc. Demnach sind die Polygone ähnlich, weil die Winkel und die Seitenverhältnisse des einen der Reihe nach gleich denen des andern sind.

Derjenige Teil der Pyramide, welcher die Spitze enthält, ist selbst eine Pyramide, der andere heisst Pyramidenstumpf und lässt sich als Differenz zweier Pyramiden darstellen. Demnach:



Eine durch die Pyramide gelegte Ebene, welche 151. weder die Spitze noch die Grundfläche trifft, bildet als Schnittfigur ein der Grundfläche kollineares Polygon und teilt die Pyramide in eine Pyramide und einen Pyramidenstumpf.

Eine durch die Pyramide parallel der Grundfläche 152. gelegte Ebene bildet als Schnittfigur ein der Grundfläche ähnliches Polygon.

Aus 152 folgt weiter: Alle durch die Spitze einer 153. Pyramide innerhalb derselben gezogenen Geraden werden durch eine der Grundfläche parallele Schnittebene in demselben Verhältniss geteilt. — Zwei homologe Seiten der beiden Polygone verhalten sich wie die Abstände der Polygone von der Spitze. — Die Flächen beider Polygone verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze. (T. II, 360.)

Anm. Schnittfläche und Grundfläche der Pyramide heissen zusammen Grundflächen des Pyramidenstumpfes. Unter einem Pyramidenstumpf versteht man, wenn nichts anderes festgesetzt wird, denjenigen, dessen Grundflächen parallel sind. Was für Figuren sind alsdann die Seitenflächen?

Legt man Ebenen durch die Spitze einer Pyramide 154. und durch alle aus einer Ecke der Grundfläche in derselben gezogenen Diagonalen, so zerfällt die Pyramide in  $n - 2$  Tetraeder.

### c) Der Kegel.

47. *Definitionen und Eigenschaften des Kegels.* — Wenn die Grundfläche einer geraden oder schiefen Pyramide ein Sehnepolygon ist, und dieses durch Vervielfältigung seiner Seitenzahl in eine Kreislinie übergeht (s. T. II, Nr. 162), so verschwinden die Seitenflächen der Pyramide, und die Seitenkanten bilden eine zusammenhängende Fläche. Diese Fläche kann auch dadurch entstanden gedacht werden, dass eine Seitenkante sich um die Spitze der Pyramide dreht, während ihr anderer Endpunkt beständig auf der Peripherie des Kreises bleibt, in welchen die Grundfläche der Pyramide überging. Die Fläche ist also eine Kegelfläche (Nr. 14 am Ende).

Anm. Auch die Gesamtheit der Seitenflächen einer gewöhnlichen Pyramide kann als Kegelfläche betrachtet werden. Inwiefern?

Eine Kegelfläche, deren Leitlinie eine in sich zurückkehrende (sich selbst nicht schneidende) Linie ist, schliesst sich durch das Hinzutreten einer Ebene zu einem Körper, welcher



Kegel genannt wird. — Ein Kegel ist also ein Körper, welcher begrenzt wird von einer Kegelfläche und einer Ebene, deren Schnittfigur eine in sich zurückkehrende, sich selbst nicht schneidende Linie ist. Die Kegelfläche, soweit sie den Kegel begrenzt, heisst Mantel, die ebene Schnittfigur Grundfläche des Kegels. Die Spitze der Kegelfläche heisst auch Spitze des Kegels, die von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Senkrechte Höhe des Kegels; die Seitenlinien der Kegelfläche, von der Spitze bis zur Grundfläche gerechnet, heissen Seitenlinien des Kegels.

Ein Kegel, dessen Grundfläche ein Kreis ist, heisst gemeiner Kegel. Die Strecke, welche den Mittelpunkt dieses Kreises (Grundkreises) mit der Spitze verbindet, heisst Axe des Kegels.

Ein gemeiner Kegel heisst gerade oder schief, jenachdem seine Axe auf der Grundfläche senkrecht steht oder nicht. — Wie der Kegel im allgemeinen ein Specialfall der Pyramide, so ist der gerade Kegel ein Specialfall der geraden Pyramide (145). Daher folgt aus 146:

155. Die Seitenlinien eines geraden Kegels sind einander gleich und bilden mit der Grundfläche gleiche Neigungswinkel (Umkehrungen).

Anders ausgedrückt:

- 155a. Zwei oder mehrere Strecken, die von einem Punkte ausserhalb einer Ebene nach der Ebene gezogen sind, sind einander gleich, wenn ihre Fusspunkte gleichen Abstand vom Punkte der von dem Punkte auf die Ebene gefällten Senkrechten haben (und umgekehrt).

Im Anschluss hieran folgt

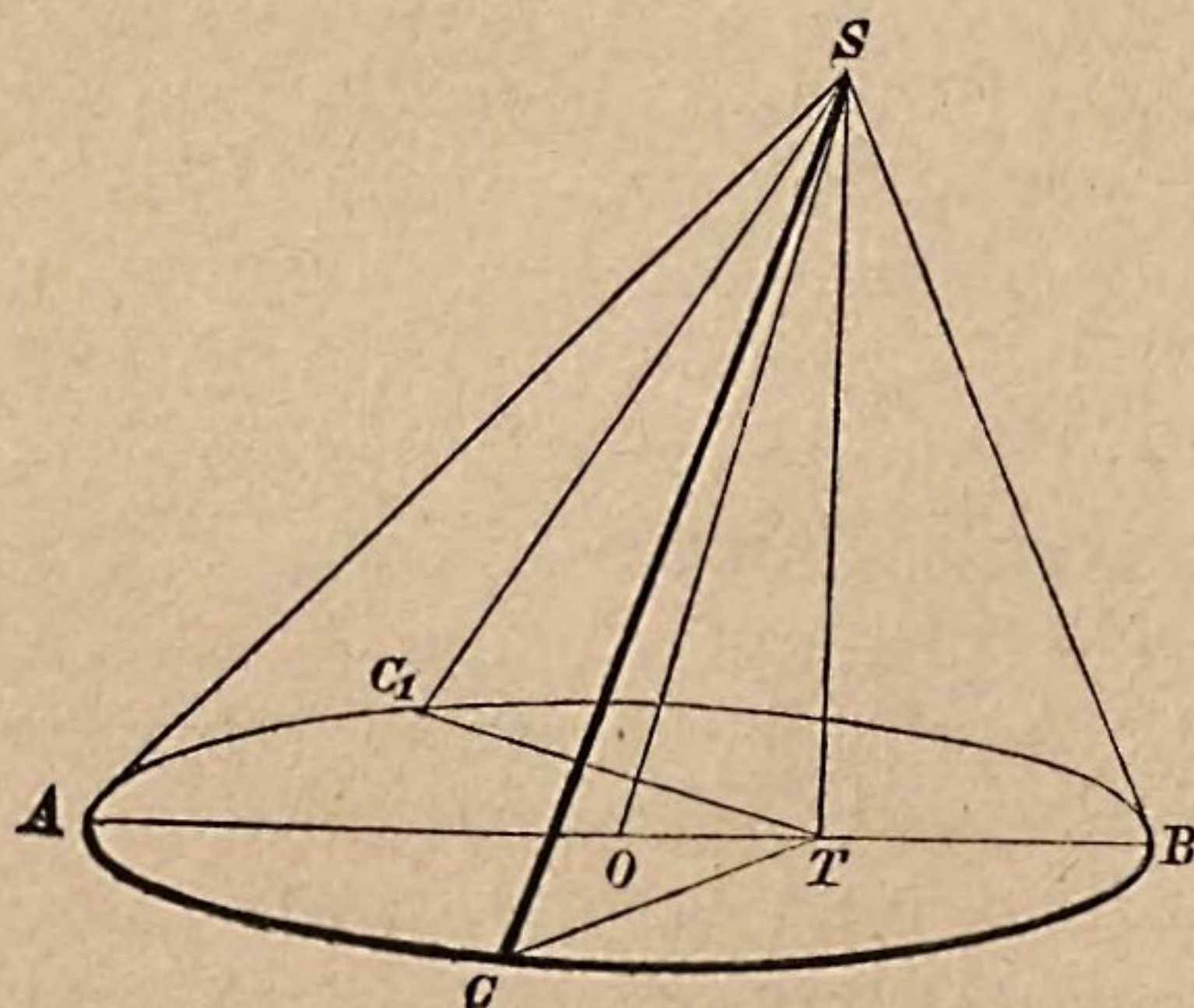
aus T. II, 108:

Unter allen Strecken, die von einem Punkte ausserhalb einer Ebene nach der Ebene gezogen werden können, ist die Senkrechte die kürzeste.

Sind im schiefen Kegel (Fig. 29) zwei Seitenlinien  $SC$  und  $SC_1$  so gezogen, dass (wenn  $T$  der Fusspunkt der Höhe ist)  $TC = TC_1$  ist, so ist auch  $SC = SC_1$  (148); d. h.:

Fig. 29.

155b.





Zwei Seitenlinien eines schiefen Kegels sind gleich 156. (und bilden gleiche Neigungswinkel mit der Grundfläche), wenn ihre Fusspunkte vom Fusspunkte der Höhe gleichen Abstand haben (oder, wenn die nach ihren Fusspunkten gezogenen Radien des Grundkreises mit dem durch den Fusspunkt der Höhe gehenden Durchmesser gleiche Winkel bilden).

Da ferner unter allen aus  $T$  nach der Peripherie des Grundkreises gezogenen Strecken diejenige ( $TA$ ), welche durch den Mittelpunkt geht, die längste, und diejenige ( $TB$ ), deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht, die kürzeste ist (T. II, Aufgabe 230), so folgt aus 149:

Unter allen Seitenlinien eines schiefen Kegels ist 157. diejenige die kürzeste, deren Fusspunkt auf dem durch den Fusspunkt der Höhe gehenden Radius liegt, und diejenige die längste, deren Fusspunkt auf der Verlängerung dieses Radius liegt.

Von zwei ungleichen Strecken, die von einem 157a. Punkte ausserhalb einer Ebene nach der Ebene gezogen sind, ist diejenige die längere, deren Fusspunkt vom Fusspunkt der von dem Punkte auf die Ebene gefällten Senkrechten den grösseren Abstand hat (und umgekehrt).

Endlich folgt aus T. II, 118:

Unter allen Seitenlinien eines schiefen Kegels 158. bildet die grösste den kleinsten, und die kleinste den grössten Neigungswinkel mit der Grundfläche.

**48. Schnittebenen des gemeinen Kegels.** — 1) Schnitt durch Spitze und Grundfläche. — Aus 150 folgt:

Eine durch Spitze und Grundfläche eines Kegels 159. gelegte Ebene bildet ein Dreieck als Schnittfigur.

Die Kegelfläche wird von einer solchen Ebene (Sekantenebene) in zwei Seitenlinien geschnitten. Jede durch die Axe der Kegelfläche gehende Sekantenebene heisst Axenschnitt, derjenige Axenschnitt, welcher auf der Grundfläche senkrecht steht, Hauptschnitt. Aus 157 folgt hiernach:

Der durch die Höhe eines schiefen Kegels gelegte 160. Axenschnitt schneidet den Mantel des Kegels in der längsten und in der kürzesten Seitenlinie und steht auf der Grundfläche senkrecht (ist also der Hauptschnitt). — Im geraden Kegel ist jeder Axenschnitt Hauptschnitt.

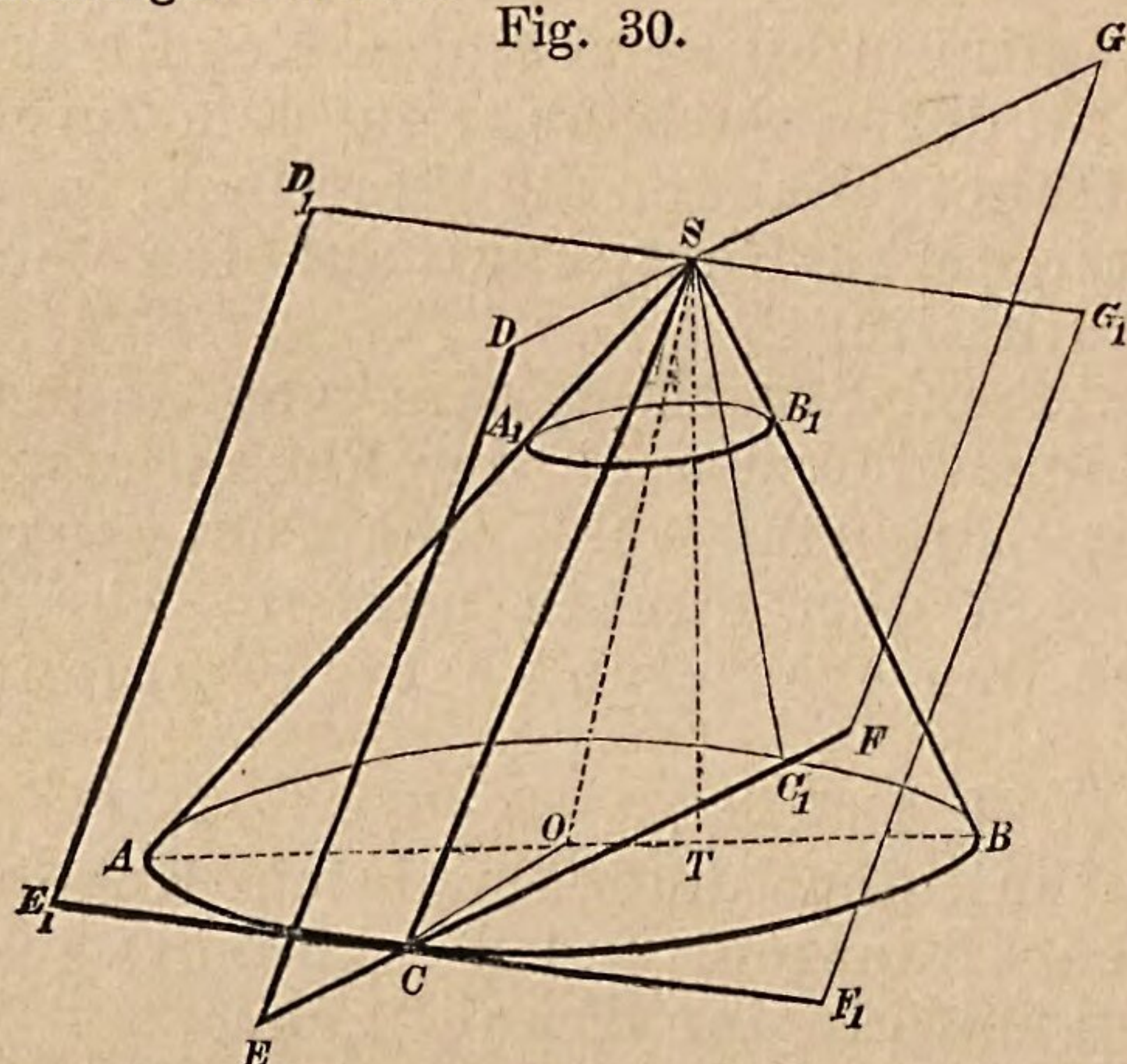


Die Axenschnitte des geraden Kegels sind kongruente gleichschenklige Dreiecke mit gemeinsamer Höhe. Daher folgt aus T. II, 99, in Verbindung mit T. IV, 49:

- 160a. Halbiert man in einem geraden Kegel den Winkel an der Spitze eines Axenschnittes, so steht die Halbierungslinie senkrecht auf der Grundfläche und geht durch den Mittelpunkt derselben.

Anm. Umkehrungssätze hierzu. — Entstehung des geraden Kegels durch Drehung eines rechtwinkligen Dreiecks um eine Kathete. — Was für ein Körper entsteht durch Drehung eines beliebigen Dreiecks um eine seiner Seiten? — Welcher Axenschnitt des schiefen Kegels ist ein gleichschenkliges Dreieck?

Fig. 30.



Dreht eine Sekantenebene  $\overline{DEFG}$  (Fig. 30) sich um eine ihrer Schnittlinien  $SC$  soweit, bis die andere Schnittlinie  $SC_1$  mit  $SC$  zusammenfällt, wodurch  $\overline{DEFG}$  in  $\overline{D_1E_1F_1G_1}$  übergeht, so hat letztere Ebene mit der Kegelfläche nur zwei zusammenfallende, d. h. eine Gerade ( $SC$ ) gemeinsam.

Eine Ebene, welche mit der Kegelfläche nur eine Gerade gemeinsam hat, heisst Tangentenebene. Man sagt, sie berühre die Kegelfläche in der gemeinsamen Geraden (Berührungslinie).

Die Schnittlinie  $EF$  der Sekantenebene mit der Grundfläche des Kegels ist eine Sekante des Grundkreises. Fällt nun  $SC_1$  mit  $SC$  zusammen, so fällt auch  $C_1$  auf  $C$ ; d. h. die Sekante  $EF$  geht über in eine Tangente  $E_1F_1$ , und man hat den Satz:

161. Jede Tangentenebene eines gemeinen Kegels schneidet die Ebene des Grundkreises in einer Tangente des Grundkreises. (Umkehrung.)

Anm. Hieraus folgt die Konstruktion der Tangentenebene in einer gegebenen Seitenlinie  $SC$  der Kegelfläche. Man lege in  $C$  die Tangente  $E_1F_1$  an den Grundkreis, und lege die Ebene durch  $SC$  und  $E_1F_1$ . Diese ist die gesuchte.



Ist der Kegel ein gerader, so ist  $SO$  senkrecht zur Grundfläche; d. h.:  $OC$  ist der Neigungsschenkel von  $SC$ . Dasselbe ist der Fall, wenn der Kegel schief ist, aber  $SC$  mit  $SA$  oder  $SB$  zusammenfällt. Nun ist  $OCE_1 = OCF_1 = R$ . In allen drei Fällen ist also nach 65  $SCE_1 = SCF_1 = R$ ; d. h. es stehen  $SC$  und  $OC \perp E_1F_1$ ; mithin steht  $E_1F_1$  (nach 49) und die Tangentenebene  $\overline{D_1E_1F_1G_1}$  (nach 52) auf dem Axenschnitt  $\overline{SCO}$  senkrecht. Man hat also den Satz:

Im geraden Kegel stehen alle, im schiefen die 162. beiden durch die längste und die kürzeste Seitenlinie gelegten Tangentenebenen auf dem durch die Berührungslinie gelegten Axenschnitte senkrecht. — Im geraden Kegel bilden alle Tangentenebenen gleiche Winkel mit der Grundfläche.

Unmittelbar einleuchtend ist der folgende Satz:

Legt man durch die Spitze eines Kegels und die 163. Seiten eines dem Grundkreise einbeschriebenen (umbeschriebenen)  $n$ -Ecks Ebenen, so begrenzen dieselben eine dem Kegel einbeschriebene (umbeschriebene)  $n$ -seitige Pyramide.

Zwei an dieselbe Kegelfläche gelegte Tangentenebenen schneiden sich in einer Geraden, welche durch die Spitze der Kegelfläche geht. Da diese Gerade ausser durch die Spitze der Kegelfläche noch durch einen beliebigen ihrer Punkte bestimmt ist, so hat man den Satz:

Durch einen auf der konvexen Seite der Mantel- 164. fläche eines gemeinen Kegels liegenden Punkt lassen sich zwei Tangentenebenen an die Kegelfläche legen.

Anm. Unter der Mantelfläche ist in diesem Satze die Kegelfläche in ihrer ganzen Ausdehnung zu verstehen. — Um aus einem gegebenen Punkte  $D_1$  die beiden Tangentenebenen an eine Kegelfläche zu legen, legt man durch  $D_1$  und die Spitze des Kegels  $S$  (Fig. 30) eine Gerade, welche die Ebene der Grundfläche des Kegels in  $S_1$  schneidet. Sind  $S_1C$  und  $S_1C_2$  die aus  $S$  an den Grundkreis gelegten Tangenten, so sind  $SS_1C$  und  $SS_1C_2$  die gesuchten Tangentenebenen. — Durch eine Gerade, welche ausserhalb eines Kegels durch die Spitze desselben geht, können zwei, durch eine beliebige andere Gerade kann nur dann eine Tangentenebene gelegt werden, wenn sie die Mantelfläche in einem Punkte berührt. (Denn jede in einer Tangentenebene liegende Gerade hat mit der Berührungslinie, also auch mit der Mantelfläche, einen einzigen Punkt gemeinsam.)

2) Schnitt durch die Grundfläche. — Von der Gestalt der Schnittlinie in diesem und dem folgenden Falle wird später Nr. 137 die Rede sein. Der Kegel zerfällt durch den



eben angegebenen Schnitt in zwei Körper, deren Gestalt zu keiner besonderen Untersuchung Anlass giebt.

3) Schnitt, der weder Grundfläche noch Spitze trifft. — Derselbe schneidet die Mantelfläche in einer krummen Linie, welche mit dem Grundkreise kollinear ist (Nr. 46). Ist die Schnittebene der Grundfläche parallel, so ist die Schnittfigur dem Grundkreise ähnlich, also selbst ein Kreis. (Dieser specielle Fall ist in Fig. 30 dargestellt.)

Derjenige Teil des Kegels, welcher die Spitze enthält, ist selbst ein Kegel, der andere heisst Kegelstumpf und lässt sich als Differenz zweier Kegel darstellen. Demnach:

165. Eine durch den Kegel gelegte Ebene, welche weder die Spitze noch die Grundfläche trifft, bildet als Schnittfigur eine der Grundfigur kollineare Linie und teilt den Kegel in einen Kegel und einen Kegelstumpf.

166. Eine durch den Kegel parallel der Grundfläche gelegte Ebene bildet als Schnittfigur einen Kreis.

Da eine auf der Axe senkrechte Ebene (Normalschnitt) nur beim geraden Kegel eine Kreislinie als Schnittfigur liefert, so ist nur die Mantelfläche eines geraden Kegels eine gemeine Kegelfläche, nicht aber diejenige eines schiefen Kegels. Demnach sind die Ausdrücke „gemeiner Kegel“ und „gemeine Kegelfläche“ wohl zu unterscheiden.

Anm. Welche Sätze folgen aus 153? — Unter einem Kegelstumpf versteht man, wenn nichts anderes festgesetzt wird, denjenigen, dessen Grundflächen parallel sind.

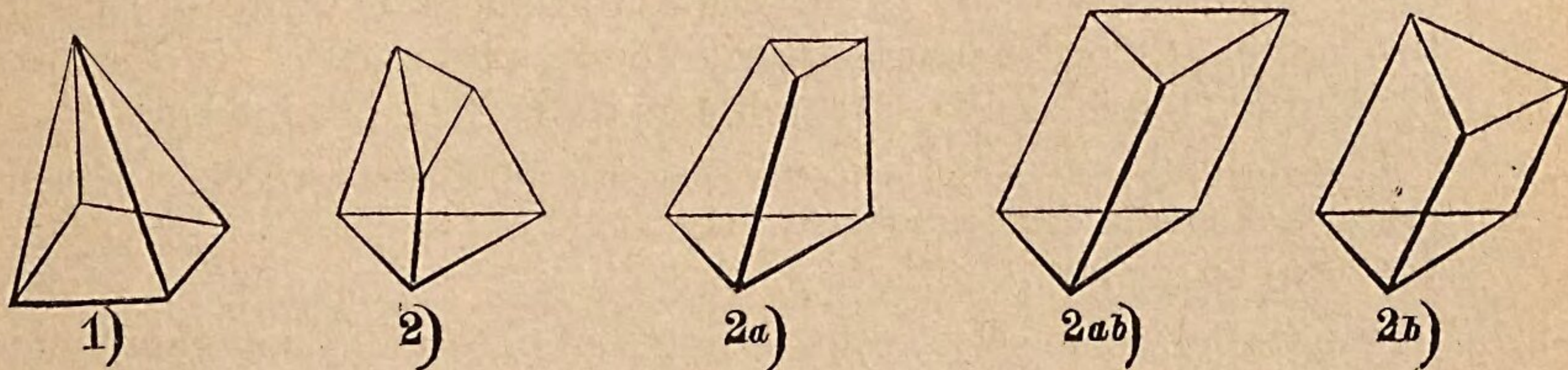
#### d) Das Pentaeder.

49. *Uebersicht.* — Sind im Raume fünf Ebenen gegeben, so sind unter den verschiedenen möglichen Fällen diejenigen erwähnenswert, in denen die Ebenen einen Körper begrenzen. Ein von fünf Ebenen begrenzter Körper heisst Pentaeder. — Die Pentaeder lassen sich einteilen nach der Zahl der Ebenen, welche durch eine Ecke gehen. Zunächst ist klar, dass nicht alle fünf Ebenen durch denselben Punkt gehen können; denn in diesem Falle entstünde eine offene fünfseitige Ecke. 1) Vier Ebenen, welche durch denselben Punkt gehen, bilden eine vierseitige Ecke, welche, durch eine fünfte Ebene geschlossen, eine vierseitige Pyramide liefert. — 2) Drei Ebenen, welche durch denselben Punkt gehen, bilden eine dreiseitige Ecke, welche, durch eine vierte Ebene geschlossen, ein Tetraeder,



und durch den Schnitt mit einer fünften Ebene eine (beliebig) abgestumpfte dreiseitige Pyramide liefert. Durch jede Ecke derselben gehen drei Ebenen. Ihre Grundflächen sind kollineare Dreiecke (s. T. II, 107), ihre Seitenflächen unregelmässige Vierecke. — 2a) Sind die Grundflächen einander parallel, so entsteht ein dreiseitiger Pyramidenstumpf (im engeren Sinne). Seine Grundflächen sind ähnliche Dreiecke, seine Seitenflächen Trapeze. — 2b) Sind zwei Seitenkanten parallel, so ist auch die dritte mit ihnen parallel (89). Das Pentaeder heisst in diesem Falle abgestumpftes dreiseitiges Prisma. Seine Grundflächen sind affine Dreiecke, seine Seitenflächen Trapeze. — 2ab) Findet gleichzeitig Parallelität der Grundflächen und der Seitenkanten statt, so heisst der Körper dreiseitiges Prisma. Seine Grundflächen sind kongruente Dreiecke, seine Seitenflächen Parallelogramme. Das Prisma ist also ein specieller Fall des dreiseitigen Pyramidenstumpfes und des abgestumpften Prismas, und diese beiden sind specielle Fälle des Pentaeders.

Fig. 31.



## B. Die Figur und ihre Bewegungen im Raume.

### 1) Lagen- und Richtungsänderung der Figur.

$\alpha$ ) Einmalige Bewegung der Figur.

a) Bewegung des Dreiecks: Das dreiseitige Prisma.

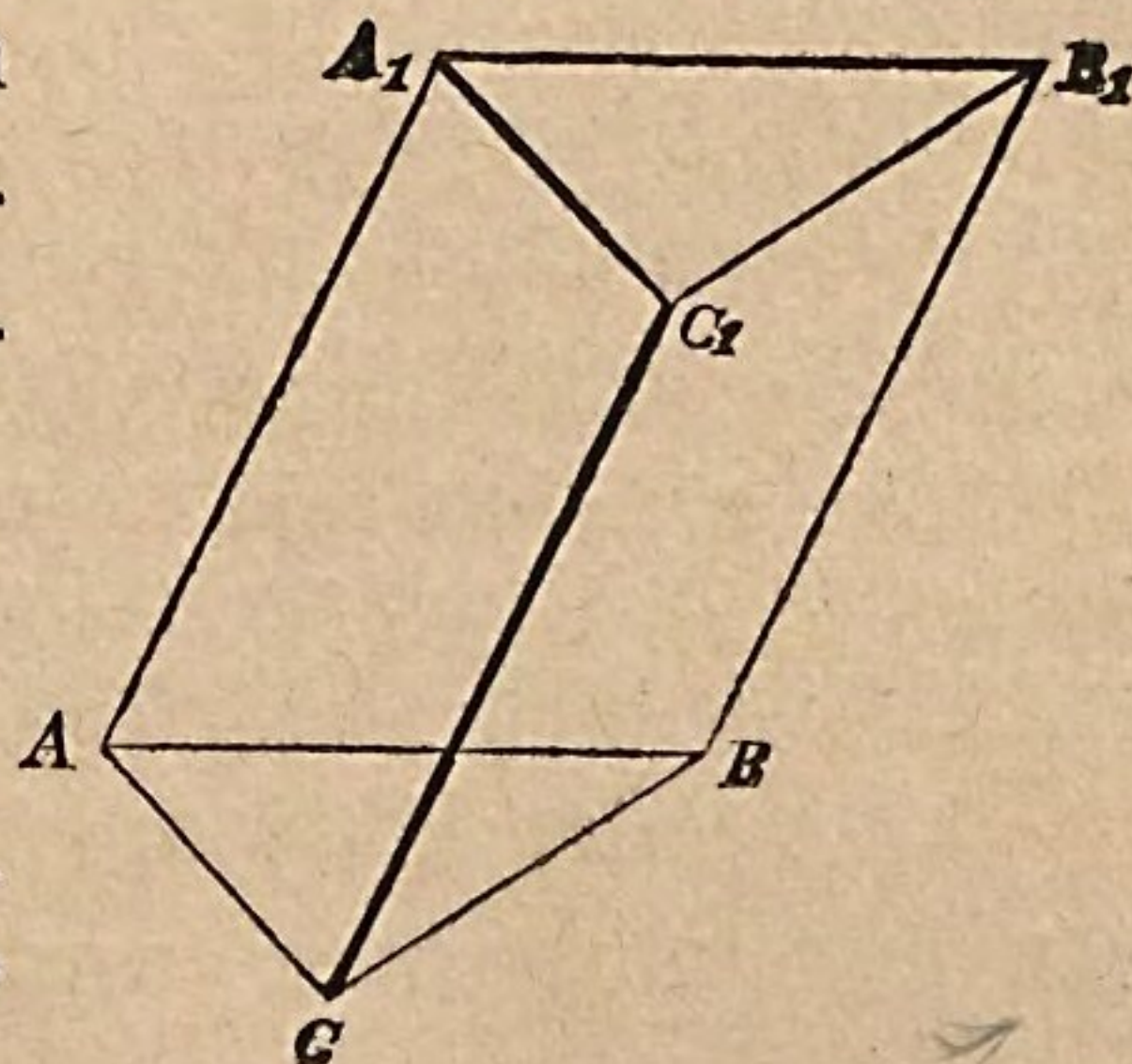
**50. Definitionen und Eigenschaften des dreiseitigen Prismas.** — Ist ein Dreieck  $\overline{ABC}$  durch einfache Verschiebung im Raume in  $\overline{A_1B_1C_1}$  übergegangen, so ist zuerst

$A_1B_1 \parallel AB, B_1C_1 \parallel BC, C_1A_1 \parallel CA;$   
und

$A_1B_1 = AB, B_1C_1 = BC, C_1A_1 = CA.$

Daher sind die Figuren  $\overline{A_1B_1BA},$

Fig. 32.





$\overline{B_1C_1CB}$ ,  $\overline{C_1A_1AC}$  Parallelogramme, und es ist  $AA_1 \# BB_1 \# CC_1$ . Da ausserdem  $\overline{ABC} \cong \overline{A_1B_1C_1}$ , so ist der von dem Dreieck  $\overline{ABC}$  beschriebene Körper ein dreiseitiges Prisma. Also:

167. Aendert ein Dreieck seine Lage im Raume so, dass einer seiner Punkte eine gerade Strecke beschreibt, so ist der von dem Dreieck beschriebene Körper ein dreiseitiges Prisma. Anders ausgedrückt: Sind in einem Pentaeder zwei Grenzflächen kongruente Dreiecke in parallelen Ebenen, so ist es ein dreiseitiges Prisma.

Ein dreiseitiges Prisma entsteht, wenn drei Ebenen sich in parallelen Geraden schneiden und von zwei parallelen Ebenen geschnitten werden. — Ein dreiseitiges Prisma ist ein Körper, begrenzt von zwei kongruenten Dreiecken in parallelen Ebenen und von drei Parallelogrammen. — Die beiden Dreiecke heissen Grundflächen, die drei Parallelogramme Seitenflächen des Prismas. Die Seiten der Dreiecke heissen Grundkanten, die gemeinsamen Seiten der Parallelogramme Seitenkanten des Prismas. — Ein dreiseitiges Prisma hat also 6 Ecken, 9 Kanten (3 Seitenkanten und 6 Grundkanten), 5 Flächen (3 Seitenflächen und 2 Grundflächen) und 9 Raumwinkel.

Anm. Wieviele und was für Ebenen und Kanten schneiden sich in jedem Eckpunkte des dreiseitigen Prismas?

Die Seitenkanten eines dreiseitigen Prismas sind gleich und parallel, ebenso je zwei Grundkanten, die in verschiedenen Grundflächen aber in derselben Seitenfläche liegen.

Je zwei gegenüberliegende Ecken einer Seitenfläche des dreiseitigen Prismas heissen Gegenpunkte desselben. Jeder Eckpunkt (z. B.  $A_1$ ) hat also zwei Gegenpunkte ( $B$  und  $C$ ). Diejenige Kante ( $BC$ ), welche zwischen den beiden Gegenpunkten ( $B$  und  $C$ ) eines Eckpunktes ( $A_1$ ) liegt, heisst seine Gegenkante. Nur die Grundkanten sind Gegenkanten der Eckpunkte.

**51. Diagonalschnitte.** — Jede durch einen Eckpunkt und seine Gegenkante gelegte Ebene schneidet das Prisma in einem Dreieck, welches Diagonalschnitt genannt wird.

Anm. Man gebe, zuerst mit Hilfe der Fig. 32, dann ohne dieselbe, zu jedem Eckpunkte die Gegenpunkte und die Gegenkante an, und bestimme die Anzahl der Diagonalschnitte.

Da jeder Diagonalschnitt (z. B.  $\overline{C_1AB}$ , Fig. 33) ein Dreieck ist und ausserdem zwei Seitenflächen ( $\overline{ACC_1A_1}$  und  $\overline{BCC_1B_1}$ )



in Dreiecke zerlegt, so ist von den beiden Körpern, in welche er das Prisma teilt, der eine  $(\overline{C_1ABC})$  von vier Dreiecken, der andre  $(\overline{C_1A_1B_1BA})$  von vier Dreiecken und einem Parallelogramme begrenzt. Man hat also den Satz:

Jeder Diagonalschnitt teilt das dreiseitige Prisma in ein Tetraeder und eine vierseitige Pyramide.

Da ferner nach 154 diese vierseitige Pyramide durch den Diagonalschnitt  $\overline{C_1A_1B}$  in zwei Tetraeder zerfällt, und die beiden Schnitte  $\overline{C_1AB}$  und  $\overline{BC_1A_1}$  durch die beiden Gegenecken  $B$  und  $C_1$  gelegt sind, so hat man den Satz:

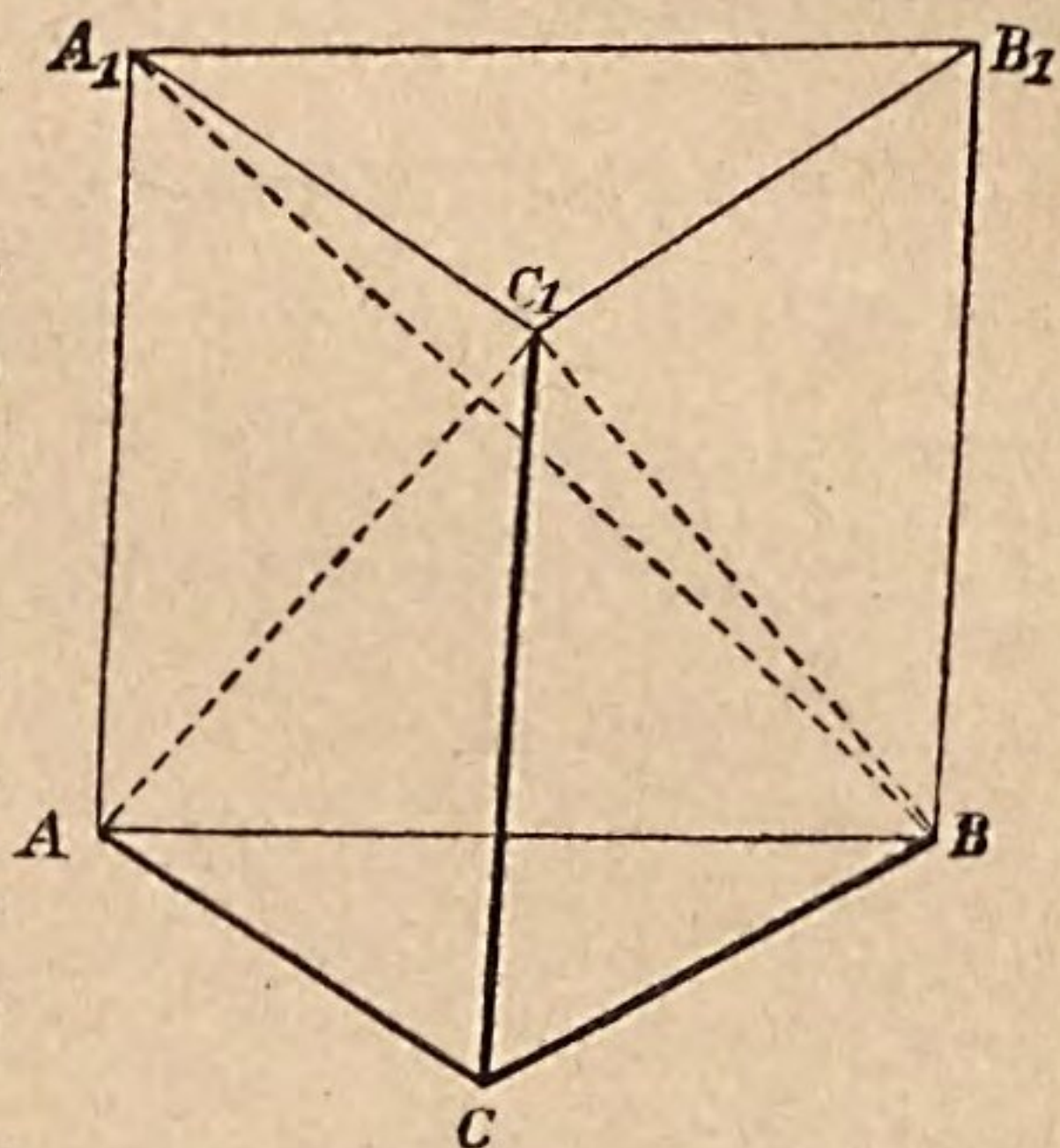
Zwei durch ein Paar Gegenecken gelegte Diagonalschnitte teilen das dreiseitige Prisma in drei Tetraeder.

Anm. Welches sind in Fig. 33 diese Tetraeder? — Welches ist die allen dreien gemeinsame Kante? — Durch wieviele Diagonalen der Seitenflächen geht jeder Diagonalschnitt, und wie können die drei Diagonalen in Fig. 33 konstruiert werden? — Welches Tetraeder enthält die untere, welches die obere, welches keine Grundfläche des Prismas? — Der Satz 169 entspricht dem Satze T. II, 131. Die zwischen den drei Tetraedern bestehende Beziehung, durch welche diese Analogie vervollständigt wird, ist Gegenstand eines späteren Satzes (219).

Legt man durch einen Punkt  $(C_1)$  einer Tetraederkante  $(BC_3)$  zwei Ebenen  $(C_1D_1B_1$  und  $C_1C_2C)$  parallel zu den der Kante gegenüberliegenden Seiten, und eine dritte Ebene  $(C_1D_1C_2D_2)$  durch zwei der von  $C_1$  ausgehenden Schnittlinien  $(C_1D_1$  und  $C_1C_2$ , oder  $C_1C$  und  $C_1B_1)$ , so zerfällt das Tetraeder in zwei dem ganzen ähnliche Tetraeder  $(\overline{BB_1C_1D_1}$  und  $\overline{C_1CC_2C_3})$  und zwei dreiseitige Prismen  $B_1C_1D_1B_2C_2D_2$  und  $\overline{CC_1C_2DD_1D_2}$ . (Fig. 33a.) Kurz:

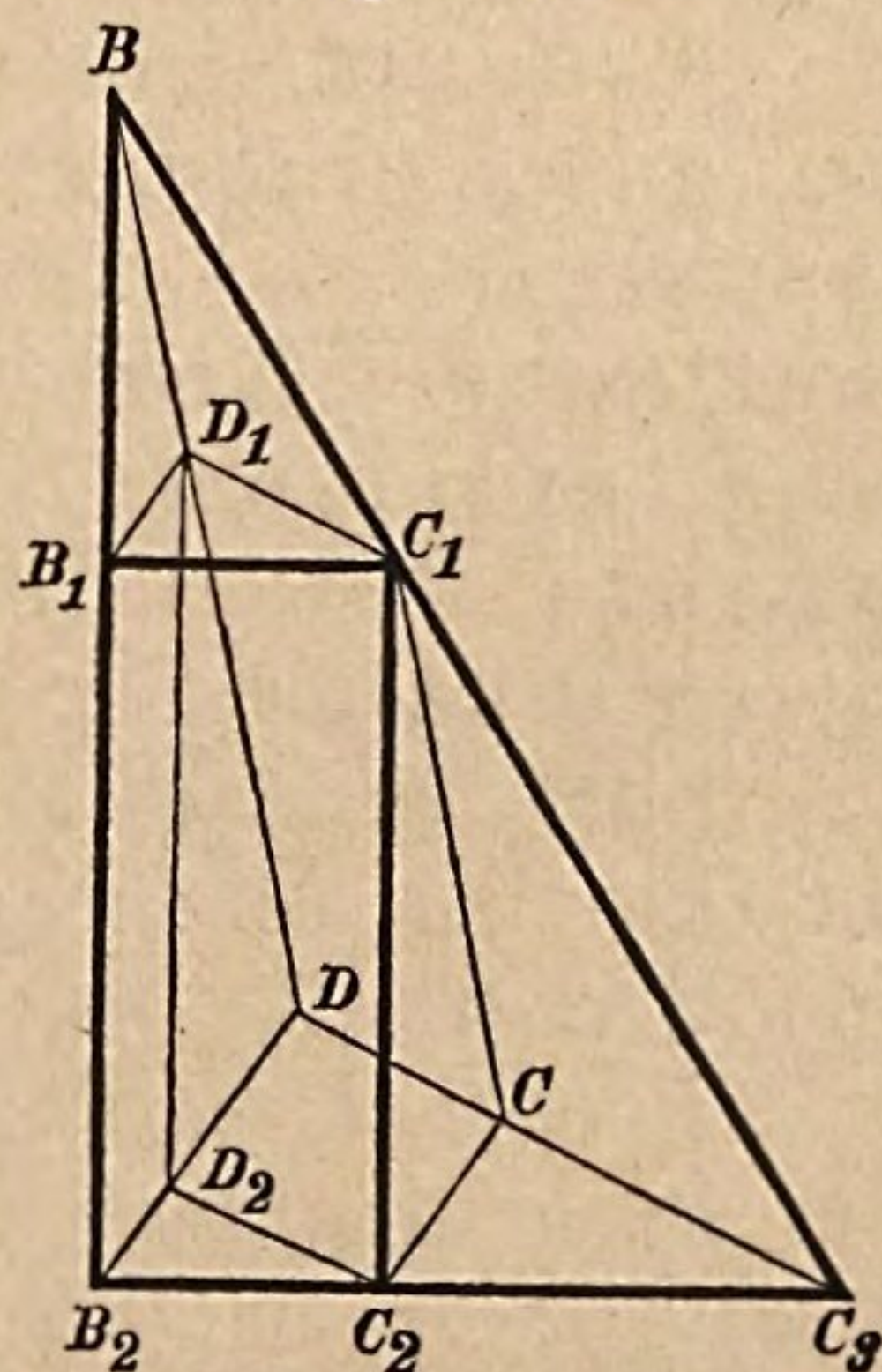
Jedes Tetraeder lässt sich durch drei Schnitte in zwei dem ganzen ähnliche Tetraeder und zwei dreiseitige Prismen zerlegen.

Fig. 33.



168.

Fig. 33a.



169a.

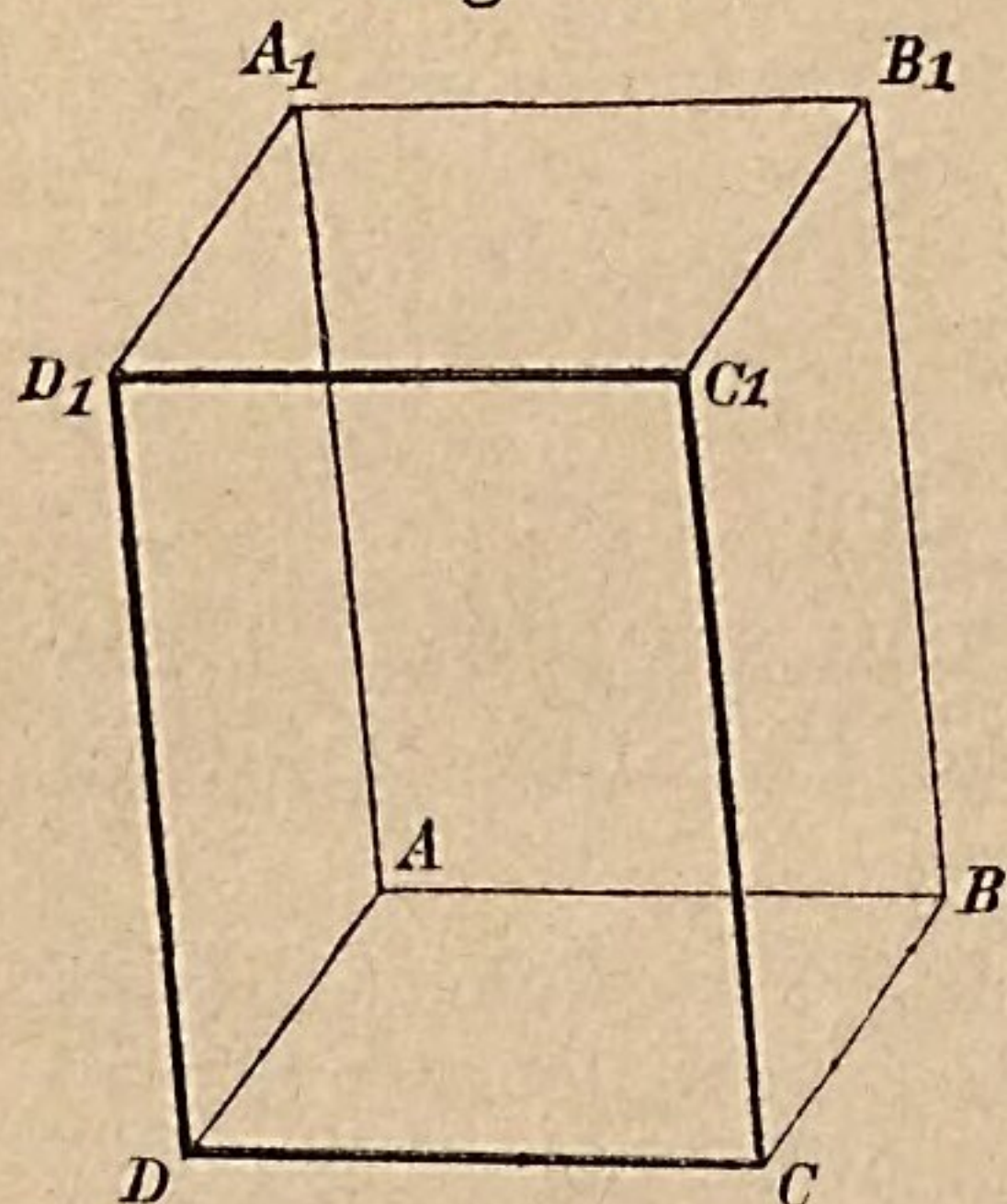


Anm. Analog lässt sich jedes Dreieck ( $DB_2C_3$ ) durch zwei Geraden ( $C_2D_2$  und  $C_2C$ ) in zwei dem ganzen ähnliche Dreiecke und ein Parallelogramm zerlegen. Die Beziehung, welche zwischen den vier Körpern besteht, wenn  $C_1$  die Mitte von  $BC_3$  ist, und durch welche diese Analogie vervollständigt wird, ist Gegenstand eines späteren Satzes (219).

**b) Bewegung des Parallelogramms: Die Säule.**

**52. Definitionen, und Eigenschaften der Säule.** — Ist ein Parallelogramm  $\overline{ABCD}$  durch einfache Verschiebung im Raume in  $\overline{A_1B_1C_1D_1}$  übergegangen, so ist zuerst

Fig. 34.



und

$$A_1B_1 \parallel AB \parallel DC \parallel D_1C_1;$$

$$B_1C_1 \parallel BC \parallel AD \parallel A_1D_1$$

$$A_1B_1 = AB = DC = D_1C_1;$$

$$B_1C_1 = BC = AD = A_1D_1.$$

Daher sind die Figuren  $\overline{A_1B_1BA}$ ,  $\overline{B_1C_1CB}$ ,  $\overline{C_1D_1DC}$ ,  $\overline{D_1A_1AD}$  ebenfalls Parallelogramme, und es ist  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ .

Der durch die Verschiebung des Parallelogramms  $\overline{ABCD}$  entstandene Körper ist demnach von sechs Ebenen begrenzt. Ein von sechs Ebenen begrenzter

Körper heist Hexaeder. In dem gegenwärtigen speciellen Falle sind die Grenzfiguren des Körpers Parallelogramme. Ein von lauter Parallelogrammen begrenztes Hexaeder heisst Säule (Parallelepipedon). Also:

170. Ändert ein Parallelogramm seine Lage im Raume so, dass einer seiner Punkte eine gerade Strecke beschreibt, so ist der von dem Parallelogramme beschriebene Körper eine Säule. Anders ausgedrückt: Sind in einem Hexaeder zwei Grenzflächen kongruente Parallelogramme in parallelen Ebenen, so ist es eine Säule.

Eine Säule entsteht, wenn vier Ebenen sich in parallelen Geraden schneiden und von zwei parallelen Ebenen geschnitten werden. — Eine Säule ist ein Körper, begrenzt von zwei kongruenten Parallelogrammen in parallelen Ebenen und vier Parallelogrammen. Die ersteren Figuren heissen Grundflächen, die letzteren Seitenflächen der Säule. Die Seiten der Grundflächen heissen Grundkanten, die gemeinsamen Seiten der Seitenflächen Seitenkanten der Säule. Eine Säule



hat also 8 Ecken, 12 Kanten (4 Seitenkanten und 8 Grundkanten), 6 Flächen (4 Seitenflächen und 2 Grundflächen) und 12 Raumwinkel.

Anm. Wieviele und was für Ebenen und Kanten schneiden sich in jedem Eckpunkte der Säule?

Die Seitenkanten einer Säule sind gleich und 171. parallel, ebenso je vier Grundkanten, die in zwei nicht anstossenden Seitenflächen liegen.

Je zwei Eckpunkte der Säule, die nicht zusammen in derselben Grenzfläche liegen, heissen Gegenpunkte der Säule. Jeder Eckpunkt (z. B.  $A_1$ ) hat also einen Gegenpunkt ( $C$ ). — Je zwei parallele Kanten, die von zwei Gegenpunkten ausgehen, heissen Gegenkanten. Jede Kante (z. B.  $A_1B_1$ ) hat also eine Gegenkante ( $CD$ ). — Je zwei Flächen, in denen zwei Paar Gegenkanten liegen, heissen Gegenflächen. Jede Fläche (z. B.  $A_1B_1C_1D_1$ ) hat also eine Gegenfläche ( $ABCD$ ). — Je zwei Ecken, deren Scheitelpunkte Gegenpunkte sind, heissen Gegenecken, je zwei Raumwinkel, deren Scheitellinien Gegenkanten sind, Gegenwinkel.

Anm. Welches sind hiernach 1) die vier Paar Gegenpunkte, 2) die sechs Paar Gegenkanten, 3) die drei Paar Gegenflächen der Säule in Fig. 34?

**53. Eigenschaften der Gegenflächen, Gegenwinkel und Gegenecken.** — Da  $DC \parallel AB$  und  $DD_1 \parallel AA_1$ , so ist auch die Ebene  $DCC_1D_1 \parallel ABB_1A_1$ . Dasselbe Resultat ergibt sich für die Gegenflächen  $BCC_1B_1$  und  $ADD_1A_1$ . Da auch die Grundflächen der Säule einander parallel sind, so kann man allgemein sagen:

Je zwei Gegenflächen einer Säule sind einander 172. parallel.

Aus 171 folgt, dass je zwei gegenüberliegende Seitenflächen einander kongruent sind. Da dasselbe auch für die Grundflächen der Säule gilt, so kann man allgemein sagen:

Je zwei Gegenflächen einer Säule sind einander 173. kongruent.

Nach 172 und 173 haben je zwei gegenüberliegende Seitenflächen dieselben Eigenschaften wie die Grundflächen. Daraus folgt:

In einer Säule kann jedes Paar Gegenflächen als 174. Grundflächen angesehen werden.

Eine Säule entsteht hiernach, wenn drei Paare paralleler Ebenen sich schneiden. Eine Säule ist ein Körper, begrenzt von drei Paar kongruenten (in parallelen Ebenen liegenden) Parallelogrammen.



Aus 172 folgt:

175. Je zwei Gegenwinkel einer Säule sind einander gleich.

Zwei Gegenecken einer Säule stimmen nach 175 in den Winkeln (oder nach 173 in den Seiten) überein, sind also, da die Aufeinanderfolge der Stücke in beiden die entgegengesetzte ist, symmetrisch, nach 112 (oder 104). Also:

176. Je zwei Gegenecken einer Säule sind symmetrisch.

Anm. Andrer Beweis dieses Satzes mittelst der Scheitelecke zu einer der beiden gegebenen Ecken und des Satzes 99. — Wieviele verschiedene Flächen, Kanten, Ecken und Raumwinkel kommen an einer Säule vor?

54. *Specielle Arten der Säule.* — Aus 171 folgt:

177. Sind in einer Säule die drei von einem Eckpunkt ausgehenden Kanten einander gleich, so sind alle Kanten gleich.

Die Grenzflächen der Säule sind in diesem Falle sämtlich Rhomben. Eine Säule, deren Grenzflächen lauter Rhomben sind, heisst rhombische Säule (Rhomboëder).

Anm. Im allgemeineren Falle können ein Paar Gegenflächen Rhomben sein. Sind zwei Paar Gegenflächen Rhomben, so muss auch das dritte Paar von derselben Art sein. Warum?

Aus 173 folgt:

178. Ist eine Ecke einer Säule eine rechte, so sind sie alle rechte.

Die Grenzflächen der Säule sind in diesem Falle sämtlich Rechtecke. Eine Säule, deren Grenzflächen lauter Rechtecke sind, heisst rechteckige Säule.

Anm. Im allgemeineren Falle können ein Paar oder zwei Paar Gegenflächen Rechtecke sein.

Die Grenzflächen einer Säule können endlich alle gleichzeitig Rhomben und Rechtecke, d. h. Quadrate sein. Eine Säule, deren Grenzflächen lauter Quadrate sind, heisst quadratische Säule (Würfel).

Anm. Im allgemeineren Falle können ein Paar oder zwei Paar Gegenflächen Quadrate sein. — Man kombiniere die in den letzten drei Anmerkungen erwähnten Fälle und bestimme Anzahl und Begrenzung der hierdurch entstehenden Arten von Säulen. — Alle Eigenschaften der Säule besitzen auch die rhombische und die rechteckige Säule. Der Würfel vereinigt die Eigenschaften der rhombischen und der rechteckigen Säule. — Analogie zwischen der Säule mit ihren speciellen Arten und dem Parallelogramm mit seinen speciellen Arten (T. II, 79). — Natürliches Vorkommen der verschiedenen Arten von Säulen in den Krystallgestalten.

55. *Diagonalschnitte, Axen und Diagonalaxen.* — Jede durch zwei Gegenkanten gelegte Ebene schneidet die Säule



in einem Parallelogramm (171), welches Diagonalschnitt genannt wird.

Anm. Wieviele Diagonalschnitte sind möglich? — Durch jede Seite und jede Diagonale einer Grenzfläche geht ein Diagonalschnitt. — Wieviele und welche Diagonalschnitte sind in Fig. 35 gezeichnet?

Jeder Diagonalschnitt teilt die Säule in zwei 179. dreiseitige Prismen.

Anm. Satz 179 entspricht dem Satze T. II, 131. (S. Anm. zu Satz 169.)

Zwei Diagonalschnitte teilen die Säule, wenn sie durch zwei parallele Kanten (z. B.  $AA_1$  und  $DD_1$ ) gehen, in vier dreiseitige Prismen (z. B.  $A_1M_1DAMD$ ), und schneiden sich in der Verbindungsstrecke der Mitten ( $M$  und  $M_1$ ) zweier Gegenflächen.

Die Verbindungsstrecke der Mitten zweier Gegenflächen heisst Axe der Säule.

Gehen die beiden Diagonalschnitte durch zwei sich schneidende Kanten (z. B.  $AA_1$  und  $AD$ ), so ist der zweite für jedes der beiden durch den ersten entstandenen Prismen ebenfalls Diagonalschnitt. Es folgt also aus 179 und 168:

Zwei Diagonalschnitte teilen die Säule, wenn sie 181. durch zwei sich schneidende Kanten (z. B.  $AA_1$  und  $AD$ ) gehen, in zwei Tetraeder und zwei vierseitige Prismen, und schneiden sich in der Verbindungsstrecke zweier Gegenpunkte ( $A$  und  $C_1$ ).

Die Verbindungsstrecke zweier Gegenpunkte heisst Diagonalaxe der Säule.

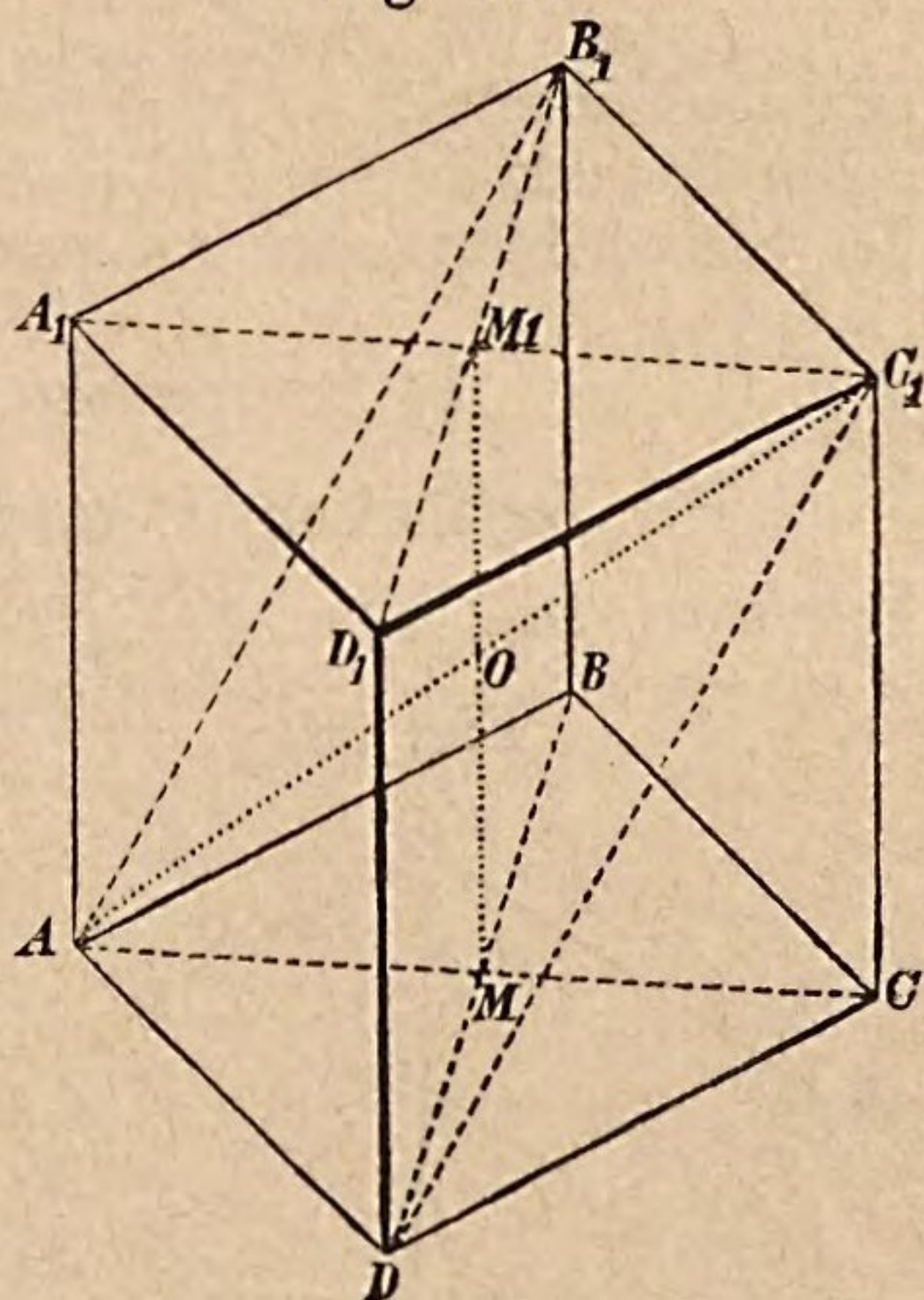
Die Diagonalaxe  $AC_1$  ist gleichzeitig Diagonale der Parallelogramme  $AA_1C_1C$  und  $ADC_1B_1$ . Ihr Mittelpunkt  $O$  liegt also (T. II, 133) auch in der Mitte der Strecken  $A_1C$  und  $B_1D$ . Und da  $B_1D$  Diagonale des Parallelogramms  $DD_1B_1B$  ist, so liegt  $O$  auch in der Mitte von  $D_1B$ . Hieraus folgt:

Die vier Diagonalaxen einer Säule schneiden sich 182. in einem Punkte und halbieren sich gegenseitig.

Der Schnittpunkt der Diagonalaxen heisst Mittelpunkt der Säule.

Fig. 35.

180.





Da die Verbindungsstrecke der Mitten zweier Gegenseiten eines Parallelogramms den andern Seiten parallel ist, durch den Mittelpunkt des Parallelogramms geht und in demselben halbiert wird (T. II, 134), so folgt weiter:

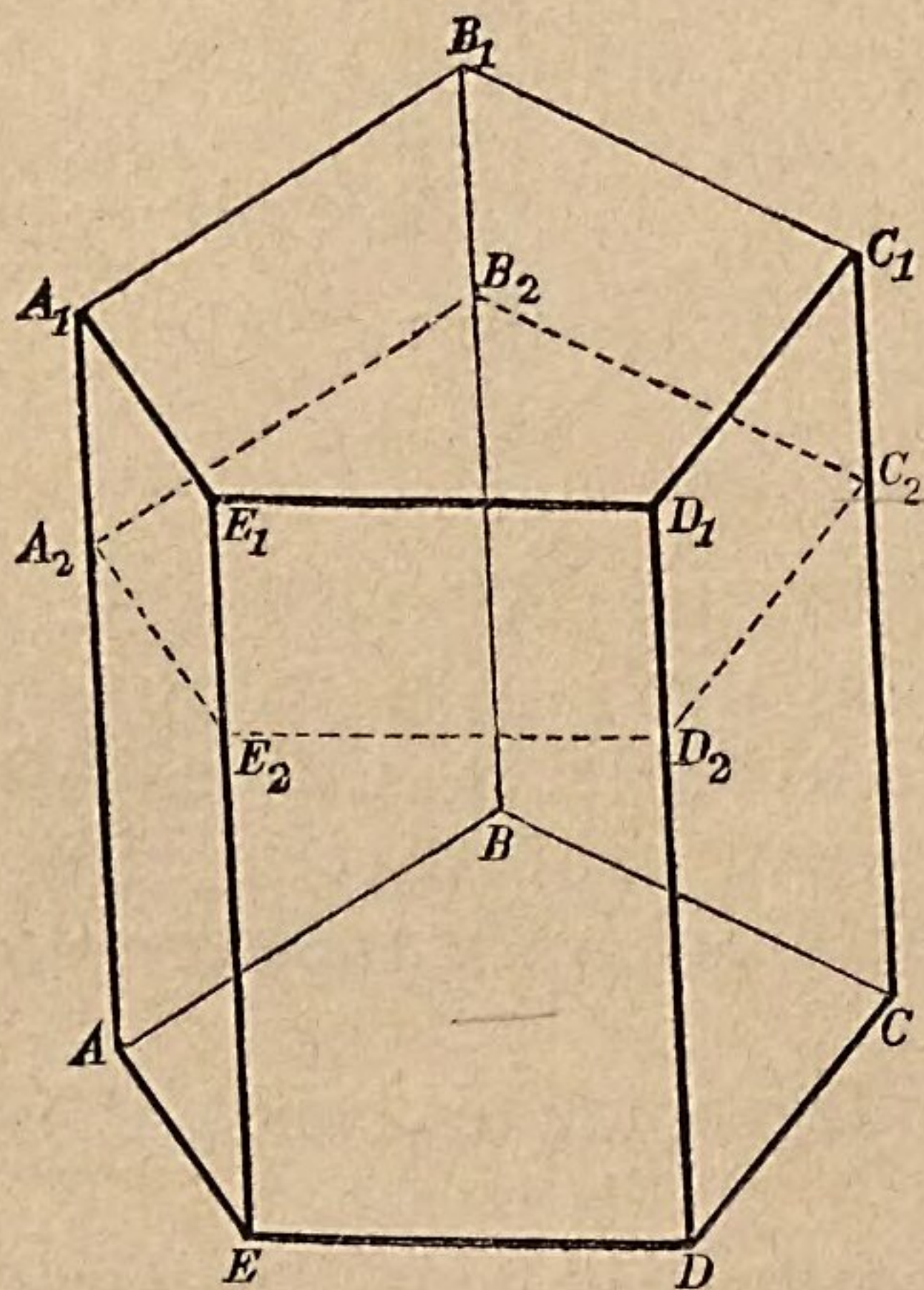
183. Die drei Axen einer Säule schneiden sich im Mittelpunkte derselben, halbieren sich gegenseitig und sind den Kanten parallel.
184. Die sechs Diagonalschnitte einer Säule schneiden sich im Mittelpunkte derselben.

Anm. In was für und wieviele Körper zerfällt die Säule durch alle Diagonalschnitte? — Man untersuche Winkel und Längenverhältnis der Axen bei den in Nr. 54 erwähnten speciellen Arten der Säule. Einteilung der Säulen hiernach. Anwendung auf die Krystallographie.

### c) Bewegung des Polygons: Das Prisma.

56. *Definitionen, und Eigenschaften des Prismas.* — Ist ein Polygon ( $n$ -Eck)  $\overline{ABCDE} \dots$  durch einfache Verschiebung im

Fig. 36.



Raume in  $\overline{A_1B_1C_1D_1E_1} \dots$  übergegangen, so ist zuerst

$A_1B_1 \parallel AB$  etc.; und  $A_1B_1 = AB$  etc.

Daher sind die Figuren  $\overline{A_1B_1AB}$  etc. Parallelogramme, und es ist  $AA_1 \parallel BB_1$  etc.

Der durch die Verschiebung des Polygons  $\overline{ABCDE} \dots$ , entstandene Körper ist demnach von  $n + 2$  Ebenen begrenzt; und zwar sind  $n$  Ebenen Parallelogramme, 2 Ebenen kongruente Polygone. — Ein von  $n$  Parallelogrammen und 2 kongruenten Polygonen begrenzter Körper heisst Prisma. Also:

185.

Lage im Raume so, dass einer seiner Punkte eine gerade Strecke beschreibt, so ist der von dem Polygon beschriebene Körper ein Prisma.

Ein Prisma entsteht, wenn  $n$  Ebenen sich in parallelen Geraden schneiden, und von zwei parallelen Ebenen geschnitten werden. — Ein Prisma ist ein Körper, begrenzt von zwei kongruenten Polygonen in parallelen Ebenen und von  $n$  Parallelogrammen. — Die beiden Polygone heissen Grundflächen,



die  $n$  Parallelogramme Seitenflächen des Prismas. Die Seiten der Polygone heissen Grundkanten, die gemeinsamen Seiten der Parallelogramme Seitenkanten des Prismas. — Die Entfernung der beiden Grundflächen heisst Höhe des Prismas. Das Prisma heisst  $n$ -seitig, wenn es  $n$  Seitenflächen enthält. — Ein  $n$ -seitiges Prisma hat also  $2n$  Ecken,  $3n$  Kanten ( $n$  Seitenkanten und  $2n$  Grundkanten),  $n+2$  Flächen ( $n$  Seitenflächen und 2 Grundflächen) und  $3n$  Raumwinkel. — Das dreiseitige Prisma ist ein specieller Fall des allgemeinen Prismas. Die Säule ist ein vierseitiges Prisma, in welchem jedes Paar Gegenflächen als Grundflächen angesehen werden kann. — Ein Prisma heisst regelmässig oder unregelmässig, je nachdem seine Grundflächen regelmässige oder unregelmässige Polygone sind. Ein Prisma heisst gerade oder schief, je nachdem seine Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht stehen oder nicht. (Kombination der beiden letzten Einteilungen.)

Aus 50 folgt:

Die Seitenflächen eines geraden Prismas sind 186. Rechtecke.

Und aus 185:

Die Seitenkanten jedes Prismas sind gleich und 187. parallel, ebenso je zwei Grundkanten, die in verschiedenen Grundflächen aber in derselben Seitenfläche liegen.

57. *Pyramide und Prisma.* — Rückt die Spitze einer Pyramide auf einer die Ebene der Grundfläche schneidenden Geraden in unendliche Entfernung, so werden ihre Seitenkanten dieser Geraden parallel, und die Figur eines parallel zur Grundfläche geführten Schnittes ist der Grundfläche nicht nur ähnlich (152), sondern auch kongruent. Der durch die Schnittfläche gebildete Pyramidenstumpf verwandelt sich also in ein Prisma. — Ist die Gerade, auf welcher die Spitze der Pyramide sich bewegt, die Höhe, so verwandelt sich der Pyramidenstumpf in ein gerades Prisma. Man hat hiernach den Satz:

Jedes Prisma kann angesehen werden als ein 188. Pyramidenstumpf, dessen Seitenkanten parallel und dessen Grundflächen daher kongruent sind.

Anm. Das dreiseitige Prisma ist hiernach ein specieller Fall des Tetraeders. — Mittelst des Satzes 188 lassen sich aus Sätzen und Formeln, welche für den Pyramidenstumpf gelten, entsprechende für das Prisma ableiten.

58. *Schnittebenen des Prismas.* — Wird ein Prisma durch eine Ebene geschnitten, so ist die Gestalt der Teile verschie-



den, je nachdem der Schnitt durch beide, oder durch eine, oder durch keine der Grundflächen geführt wird.

1) Schnitt durch beide Grundflächen. — Ein durch beide Grundflächen des Prismas geführter Schnitt teilt dasselbe in zwei Polyeder. — Ist der Schnitt den Seitenkanten parallel, so sind auch seine beiden Schnittlinien mit den Seitenflächen gleich und parallel zu den Seitenkanten (20); der Schnitt ist also ein Parallelogramm, und die beiden Polyeder, in welche das Prisma zerfällt, sind wieder Prismen. Man hat also den Satz:

189. Eine durch beide Grundflächen eines Prismas parallel den Seitenkanten gelegte Ebene bildet ein Parallelogramm als Schnittfigur und teilt das Prisma in zwei neue Prismen.

2) Schnitt durch eine Grundfläche. — Derselbe teilt das Prisma in zwei Polyeder.

3) Schnitt, der keine Grundfläche trifft. — Derselbe schneidet jede der Seitenflächen, und ist daher ein Polygon von gleicher Seitenzahl wie die Grundflächen.

Ist in Fig. 36  $ABCDE$  eine Grundfläche des Prismas und  $A_2B_2C_2D_2E_2$  die Schnittfigur, so gehen die Verbindungslinien je zweier homologer Ecken beider Polygone (z. B.  $AA_2$ ) durch denselben unendlich fernen Punkt. Es müssen sich ferner die Verlängerungen je zweier homologer Seiten (z. B.  $AB$  und  $A_2B_2$ ) in Punkten schneiden, die den Ebenen beider Polygone gleichzeitig angehören, d. h. in Punkten, welche auf der Schnittlinie beider Ebenen liegen. Da also die beiden Polygone die Eigenschaft haben, dass die Verbindungslinien ihrer homologen Punkte alle durch einen unendlich fernen Punkt gehen, und dass die Schnittpunkte ihrer homologen Seitenlinien alle auf einer endlich fernen Geraden liegen, so sind die beiden Polygone affin. (T. II, Nr. 107.)

Ist die Schnittebene den Grundflächen parallel, so rückt die Schnittlinie beider Ebenen in unendliche Entfernung, und die Affinität der beiden Polygone geht in die Kongruenz über. (Dieser specielle Fall ist in Fig. 36 dargestellt.)

Anm. Die Kongruenz der beiden Polygone ist auch aus der Gleichheit aller Seiten und aller Winkel leicht zu beweisen.

Aus dem Voranstehenden folgen die Sätze:

190. Eine durch das Prisma gelegte Ebene, welche keine der Grundflächen trifft, bildet als Schnittfigur ein der Grundfläche affines Polygon.



Eine durch das Prisma parallel den Grundflächen 191. gelegte Ebene bildet als Schnittfigur ein den Grundflächen kongruentes Polygon und teilt das Prisma in zwei neue Prismen.

Legt man Ebenen durch eine Seitenkante eines 192. Prismas und durch alle aus einem ihrer Endpunkte in einer Grundfläche gezogenen Diagonalen, so zerfällt das Prisma in  $n - 2$  dreiseitige Prismen.

#### d) Bewegung des Kreises: Der Cylinder.

**59. Definitionen, und Eigenschaften des Cylinders.** — Wenn eine Grundfläche eines geraden oder schiefen Prismas ein Sehnenpolygon ist, und dieses durch Vervielfältigung seiner Seitenzahl in eine Kreislinie übergeht (s. T. II, Nr. 162), so verschwinden die Seitenflächen des Prismas, und die Seitenkanten bilden eine zusammenhängende Fläche. Diese Fläche kann auch dadurch entstanden gedacht werden, dass eine Seitenkante sich verschiebt, während ihr einer Endpunkt beständig auf der Peripherie des Kreises bleibt, in welchen die Grundfläche des Prismas übergang. Die Fläche ist also eine Cylinderfläche (Nr. 15 am Ende).

Anm. Auch die Gesamtheit der Seitenflächen eines gewöhnlichen Prismas kann als Cylinderfläche betrachtet werden. Inwiefern?

Eine Cylinderfläche, deren Leitlinie eine in sich zurückkehrende (sich selbst nicht schneidende) Linie ist, schliesst sich durch das Hinzutreten zweier paralleler Ebenen zu einem Körper, welcher Cylinder genannt wird. — Ein Cylinder ist also ein Körper, welcher begrenzt wird von einer Cylinderfläche und zwei parallelen Ebenen, deren Schnittfiguren in sich selbst zurückkehrende, sich selbst nicht schneidende Linien sind. Die Cylinderfläche, soweit sie den Cylinder begrenzt, heisst Mantel, die ebenen Schnittfiguren Grundflächen des Cylinders. Die Entfernung der beiden Grundflächen heisst Höhe des Cylinders; die Seitenlinien der Cylinderfläche, soweit sie zwischen den Grundflächen liegen, heissen Seitenlinien des Cylinders.

Ein Cylinder, dessen Grundflächen Kreise sind, heisst gemeiner Cylinder. Die Strecke, welche die Mittelpunkte dieser Kreise (Grundkreise) verbindet, heisst Axe des Cylinders.

Ein gemeiner Cylinder heisst gerade oder schief, je nachdem seine Axe auf den Grundflächen senkrecht steht oder nicht. — Wie der Cylinder im allgemeinen ein Specialfall des



Prismas, so ist der gerade Cylinder ein Specialfall des geraden Prismas.

Wie das Prisma aus dem Polygon, so entsteht der gemeine Cylinder durch einfache Verschiebung eines Kreises im Raume. Man kann daher sagen:

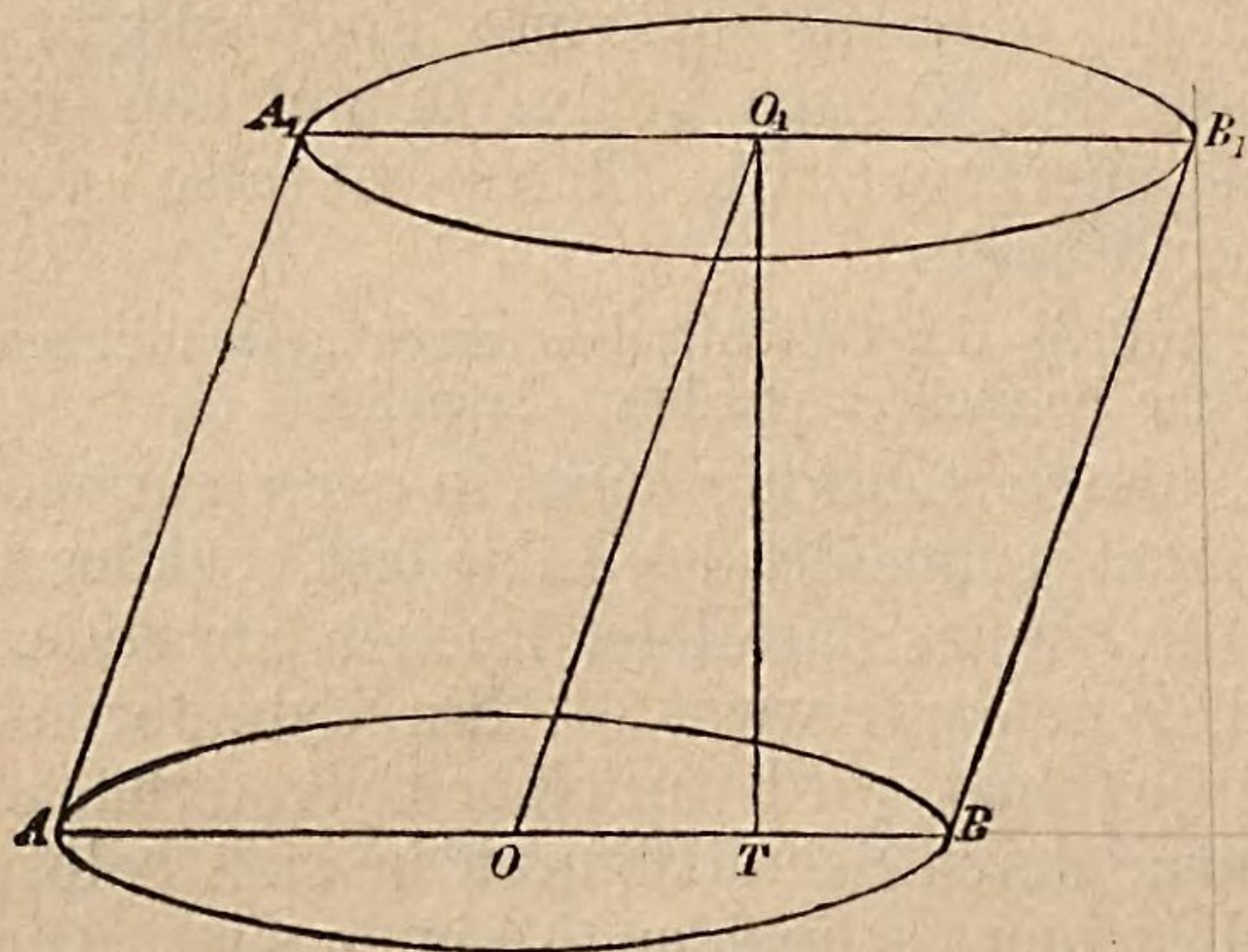
193. Aendert ein Kreis seine Lage im Raume so, dass einer seiner Punkte eine gerade Strecke beschreibt, so ist der von dem Kreise beschriebene Körper ein gemeiner Cylinder.

Aus 187 folgt:

194. Die Seitenlinien eines Cylinders sind gleich und parallel.

**60. Kegel und Cylinder.** — Rückt die Spitze eines Kegels auf einer die Ebene der Grundfläche schneidenden Geraden in unendliche Entfernung, so werden ihre Seitenlinien dieser Geraden parallel, und die Figur eines parallel zur Grundfläche

Fig. 37.



geführten Schnittes ist der Grundfläche nicht nur ähnlich (166), sondern auch kongruent. Der durch die Schnittfläche gebildete Kegelstumpf verwandelt sich also in einen Cylinder. — Ist die Gerade, auf welcher die Spitze des Kegels sich bewegt, die Höhe, so verwandelt sich der Kegelstumpf in einen geraden

Cylinder. Man hat hiernach den Satz:

195. Jeder Cylinder kann angesehen werden als ein Kegelstumpf, dessen Seitenlinien parallel und dessen Grundflächen daher kongruent sind.

Anm. Mittelt des Satzes 195 lassen sich aus Sätzen und Formeln, welche für den Kegelstumpf gelten, entsprechende für den Cylinder ableiten.

**61. Schnittebenen des gemeinen Cylinders.** — 1) Schnitt durch beide Grundflächen. — Nur die den Seitenlinien parallelen Schnitte sind beachtenswert. Aus 189 folgt:

196. Eine durch beide Grundflächen eines Cylinders parallel den Seitenlinien gelegte Ebene bildet ein Parallelogramm als Schnittfigur.



Die Cylinderfläche wird von einer solchen Ebene (Sekantenebene) in zwei Seitenlinien geschnitten. Jede durch die Axe der Cylinderfläche gehende Sekantenebene heisst Axenschnitt, derjenige Axenschnitt, welcher auf der Grundfläche senkrecht steht, Hauptschnitt. Da die Endpunkte der Axe  $OO_1$  (Fig. 37) Mitten zweier gegenüberliegenden Seiten ( $AB$  und  $A_1B_1$ ) eines Axenschnittes sind, so ist auch  $AO \perp A_1O_1$ , folglich  $OO_1 \perp AA_1$ ; d. h.:

Die Axe eines Cylinders ist gleich und parallel 197. den Seitenlinien.

Der durch eine Höhe des schiefen Cylinders gelegte Axenschnitt steht auf der Grundfläche senkrecht (ist also der Hauptschnitt). — Im geraden Cylinder ist jeder Axenschnitt Hauptschnitt. 197a.

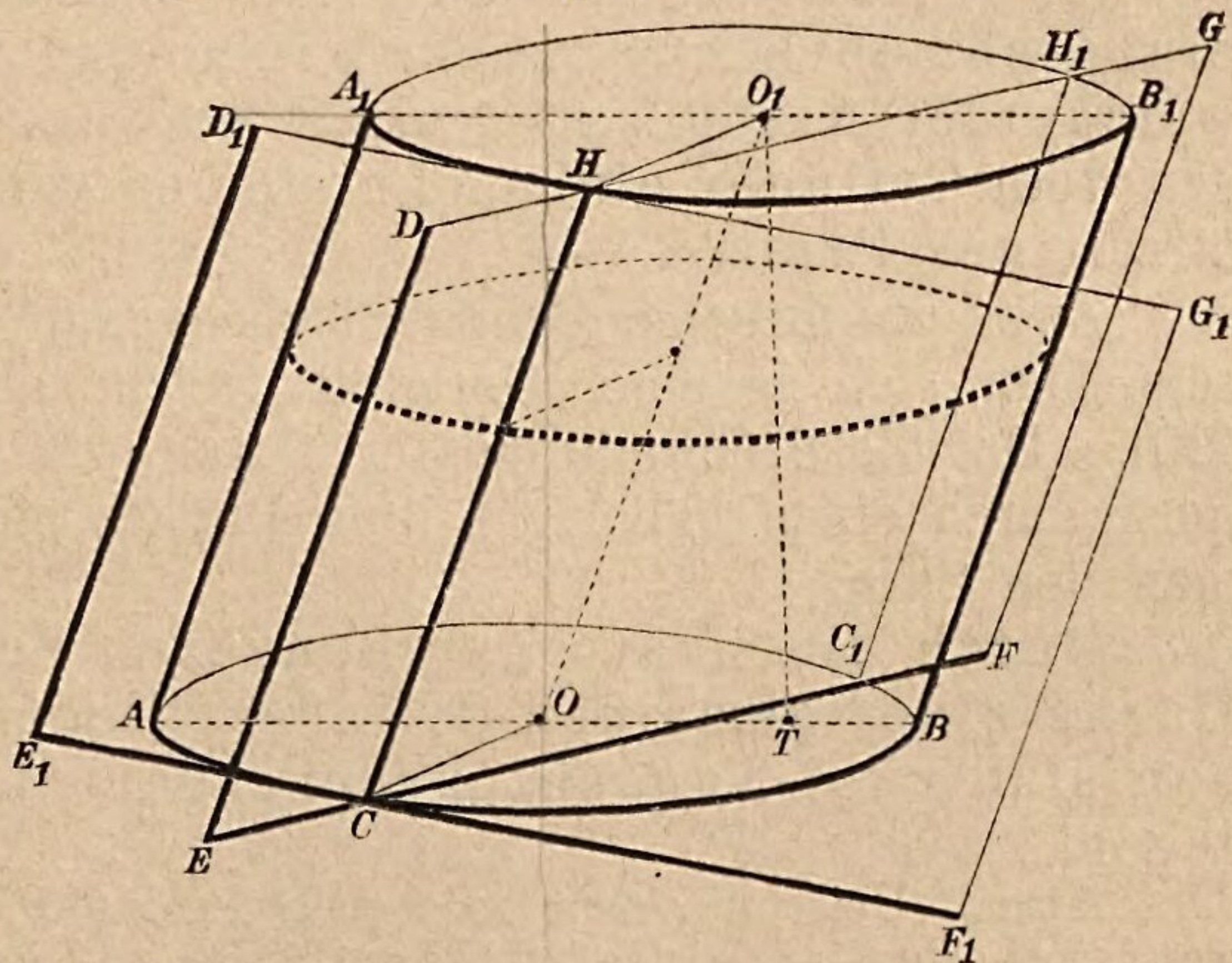
Anm. Was für Figuren sind die Axenschnitte eines geraden Cylinders? — Entstehung des geraden Cylinders durch Drehung eines Rechtecks um eine seiner Seiten. — Welcher Axenschnitt des schiefen Cylinders ist ein Rechteck?

Dreht eine Sekantenebene  $\overline{DEFG}$  (Fig. 38) sich um eine ihrer Schnittlinien  $HC$  soweit, bis die andere Schnittlinie  $H_1C_1$  mit  $HC$  zusammenfällt, wodurch  $\overline{DEFG}$  in  $\overline{D_1E_1F_1G_1}$  übergeht, so hat letztere Ebene mit der Cylinderfläche nur zwei zusammenfallende, d. h. eine Gerade ( $HC$ ) gemeinsam.

Eine Ebene, welche mit der Cylinderfläche nur eine Gerade gemeinsam hat, heisst Tangentenebene. Man sagt, sie berühre die Cylinderfläche in der gemeinsamen Geraden (Berührungslinie).

Die Schnittlinie  $EF$  der Sekantenebene mit einer Grundfläche des Cylinders ist eine Sekante des Grundkreises. Fällt nun  $H_1C_1$  mit  $HC$  zusammen, so fällt auch  $C_1$  auf  $C$ ; d. h. die Sekante  $EF$  geht über in eine Tangente  $E_1F_1$ , und man hat den Satz:

Fig. 38.





198. Jede Tangentenebene eines gemeinen Cylinders schneidet die Ebenen der Grundkreise in Tangenten der Grundkreise. (Umkehrung.)

Anm. Hieraus folgt die Konstruktion der Tangentenebene in einer gegebenen Seitenlinie  $HC$  der Cylinderfläche. Man lege in  $C$  die Tangente  $E_1F_1$  an den Grundkreis, und lege die Ebene durch  $HC$  und  $E_1F_1$ . Diese ist die gesuchte.

Ist der Cylinder ein gerader, so ist  $O_1O$ , also (nach 197) auch  $HC$  senkrecht zu den Grundflächen, also auch zur Tangente  $E_1F_1$ . — Fällt im schiefen Cylinder  $HC$  mit einer der Seitenlinien des Hauptschnittes  $A_1A$  (oder  $B_1B$ ) zusammen, so ist  $OA$  der Neigungsschenkel von  $A_1A$ . Nun ist  $OCE_1 = OCF_1 = R$ . In allen drei Fällen ist also nach 65  $HCE_1 = HCF_1 = R$ ; d. h.: es stehen  $HC$  und  $OC \perp E_1F_1$ ; mithin steht  $E_1F_1$  (nach 49) und die Tangentenebene  $\overline{D_1E_1F_1G_1}$  (nach 52) auf dem Axenschnitt  $HCOO_1$  senkrecht. Man hat also den Satz:

199. Im geraden Cylinder stehen alle, im schiefen die beiden durch die Seitenlinien des Hauptschnittes gelegten Tangentenebenen auf dem durch die Berührungslinie gehenden Axenschnitte senkrecht. — Im geraden Cylinder stehen alle Tangentenebenen auf den Grundflächen senkrecht.

Unmittelbar einleuchtend ist der folgende Satz:

200. Legt man durch die Seiten eines dem Grundkreise einbeschriebenen (umbeschriebenen)  $n$ -Ecks Ebenen, welche der Axe parallel sind, so begrenzen dieselben ein dem Cylinder einbeschriebenes (umbeschriebenes)  $n$ -seitiges Prisma.

Zwei an dieselbe Cylinderfläche gelegte Tangentenebenen schneiden sich in einer Geraden, welche der Axe parallel ist (20). Da diese Gerade ausser durch die Richtung der Axe noch durch einen beliebigen ihrer Punkte bestimmt ist, so hat man den Satz:

201. Durch einen auf der konvexen Seite der Mantelfläche eines gemeinen Cylinders liegenden Punkt lassen sich zwei Tangentenebenen an die Cylinderfläche legen.

Anm. Um aus einem gegebenen Punkte  $D_1$  die beiden Tangentenebenen an eine Cylinderfläche zu legen, legt man durch  $D_1$  die der Axe  $O_1O$  (Fig. 38) parallele Gerade, welche die Ebene der Grundfläche des Kegels in  $E_1$  schneidet. Sind dann  $E_1C$  und  $E_1C_2$  die aus  $E_1$  an den Grundkreis gelegten Tangenten, so sind  $D_1E_1C$  und  $D_1E_1C_2$  die gesuchten Tangentenebenen. — Durch eine Gerade, welche ausserhalb



eines Cylinders der Axe desselben parallel ist, können zwei, durch eine beliebige andere Gerade kann nur dann eine Tangentenebene gelegt werden, wenn sie die Mantelfläche in einem Punkte berührt. (Denn jede in einer Tangentenebene liegende Gerade hat mit der Berührungslinie, also auch mit der Mantelfläche, einen einzigen Punkt gemeinsam.)

2) Schnitt durch eine Grundfläche. — Von der Gestalt der Schnittlinie in diesem und dem folgenden Falle wird später die Rede sein. Der Cylinder zerfällt durch den eben angegebenen Schnitt in zwei Körper, deren Gestalt zu keiner besonderen Untersuchung Anlass giebt.

3) Schnitt, der keine der Grundflächen trifft. — Derselbe schneidet die Mantelfläche in einer krummen Linie, welche mit den Grundkreisen affin ist (Nr. 58). Ist die Schnittebene der Grundfläche parallel, so ist die Schnittfigur dem Grundkreise kongruent. (Dieser specielle Fall ist in Fig. 38 dargestellt.)

Aus dem Voranstehenden folgen die Sätze:

Eine durch den Cylinder gelegte Ebene, welche 202. keine der Grundflächen trifft, bildet als Schnittfigur eine der Grundfigur affine Linie.

Eine durch den Cylinder parallel den Grundflächen 203. gelegte Ebene bildet als Schnittfigur einen den Grundflächen kongruenten Kreis und teilt den Cylinder in zwei neue Cylinder.

Da eine auf der Axe senkrechte Ebene (Normalschnitt) nur beim geraden Cylinder eine Kreislinie als Schnittfigur liefert, so ist nur die Mantelfläche eines geraden Cylinders eine gemeine Cylinderfläche, nicht aber diejenige eines schiefen Cylinders. Demnach sind die Ausdrücke „gemeiner Cylinder“ und „gemeine Cylinderfläche“ wohl zu unterscheiden.

$\beta$ ) Mehrmalige Bewegung der Figur.

62. *Vorbemerkung.* — Nach T. II, Nr. 6 erlangt ein durch Bewegung eines Gebildes entstehendes neues Gebilde die Eigenschaft einer bestimmten Grösse durch die längere oder kürzere Dauer der Bewegung des erzeugenden Gebildes. Die Grösse des neuen Gebildes hängt also ab von der Grösse des erzeugenden Gebildes und von der Grösse seiner Bewegung. Hieraus folgt unmittelbar der allgemeine Satz:

Durch gleiche Bewegungen ( $h_1$  und  $h_2$ ) gleicher Ge- 203a. bilde ( $a_1$  u.  $a_2$ ) entstehen wieder gleiche Gebilde ( $a_1$  u.  $a_2$ ).

Anm. Da die in T. II, Nr. 6 besprochene Bewegung eine Vorwärtsbewegung, d. h. eine Verschiebung ist, so sind  $h_1$  und  $h_2$  parallele Strecken.



Und hieraus weiter:

203b, Machen zwei gleiche Gebilde ( $a_1$  und  $a_2$ ) ungleiche Bewegungen ( $h_1$  und  $h_2$ ), so verhalten sich (an Grösse) die entstehenden Gebilde ( $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ ) wie die Bewegungen.  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{h_1}{h_2}$ .

203c, Machen zwei ungleiche Gebilde ( $a_1$  und  $a_2$ ) gleiche Bewegungen ( $h_1$  und  $h_2$ ), so verhalten sich (an Grösse) die entstehenden Gebilde ( $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ ) wie die erzeugenden.  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1}{a_2}$ .

Wenn zwei ungleiche Gebilde ( $a_1$  und  $a_2$ ) durch ungleiche Bewegungen ( $h_1$  und  $h_2$ ) zwei Gebilde ( $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ ) hervorbringen, so nehmen wir noch ein drittes Gebilde ( $a$ ) an, welches aus  $a_1$  durch die Bewegung  $h_2$  entsteht. Es entsteht also

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & \text{aus} & a_1 & \text{durch die Bewegung} & h_1, & & \\ a & ,, & a_1 & ,, & ,, & ,, & h_2, \\ a_2 & ,, & a_2 & ,, & ,, & ,, & h_2. \end{array}$$

Dann ist nach 203b und 203c:

$$\frac{\alpha_1}{a} = \frac{h_1}{h_2}; \quad \frac{a}{\alpha_2} = \frac{a_1}{a_2};$$

folglich durch Multiplikation:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{h_1}{h_2};$$

203d. d. h.: Machen zwei ungleiche Gebilde ( $a_1$  und  $a_2$ ) ungleiche Bewegungen ( $h_1$  und  $h_2$ ), so ist das Grössenverhältnis der entstehenden Gebilde ( $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ ) gleich dem Produkt aus den Grössenverhältnissen der erzeugenden Gebilde und der Bewegungen.

Anm. Von diesen Sätzen sind die Sätze T. II, 140, 143, 144, 147 spezielle Fälle.

### Bewegung des Parallelogramms.

#### 1. Die geometrischen Operationen mit Säulen.

**63. Addition.** — a) Stellt  $ABCDEF$  (39) eine ebene Figur vor, in welcher zwischen den Parallelogrammen  $ab$ ,  $bc$ ,  $ac$  die Beziehung besteht:

$$ab + bc = ac \text{ (vgl. T. II, Nr. 81),}$$

und geht diese Figur durch Verschiebung in  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$



über, so beschreibt jedes der drei Parallelogramme eine Säule, ( $\overline{aba_1b_1} = ab$ ,  $\overline{beb_1e_1} = bc$ ,  $\overline{aca_1e_1} = ac$ ), jedes der Dreiecke  $\overline{ABC}$  und  $\overline{DEF}$  ein dreiseitiges Prisma. Aus 203a folgt dann, dass die beiden Prismen gleiche Grösse haben. Subtrahiert man dann das linke Prisma von der

Summe der Säulen  $\overline{aba_1b_1}$  und  $\overline{beb_1e_1}$ , und addiert das rechte Prisma hinzu, so erhält man die Säule  $\overline{aca_1e_1}$ . Es ist also

$$1) \quad ab + bc = ac.$$

b) Stellt  $ABCDEF$  ein dreiseitiges Prisma vor, so hat man von der Summe der Säulen  $\overline{aba_1b_1}$  und  $\overline{beb_1e_1}$  noch das hintere Prisma ( $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ) zu subtrahieren und das vordere ( $ABCDEF$ ) zu addieren, um die Säule  $\overline{aca_1e_1}$  zu erhalten. Die Formel 1) gilt also auch in diesem Falle.

In beiden Fällen entstehen die Säulen  $ab$ ,  $bc$  und  $ac$  auch durch Verschiebung der Parallelogramme  $a$  nach  $b$ ,  $b$  nach  $c$  und  $a$  nach  $c$ . Aus Formel 1) ergibt sich die Regel:

Soll man zwei Säulen mit kongruenter Grundfläche addieren, so legt man sie so *hint* einander, dass ihre ersten Grundflächen zusammenfallen. Dann ist ihre Summe die Säule zwischen ihren anderen Grundflächen.

Anm. Addition mehrerer Säulen durch wiederholte Anwendung von 204.

**64. Subtraktion.** — Aus 1) folgt:

$$2) \quad ac - bc = ab.$$

Demnach ist  $ab$  die Differenz zwischen  $ac$  und  $bc$ , und Fig. 39 liefert die Regel:

Soll man eine Säule von einer anderen mit kongruenter Grundfläche subtrahieren, so legt man sie so *in* einander, dass ihre ersten Grundflächen zusammenfallen. Dann ist ihre Differenz die Säule zwischen ihren anderen Grundflächen.

Sind die durch Subtraktion zu vereinigenden Säulen inhaltsgleich, so fallen [nach Formel 2)] auch ihre zweiten Grundflächen in dieselbe Ebene; d. h.: beide Säulen liegen zwischen

Fig. 39.

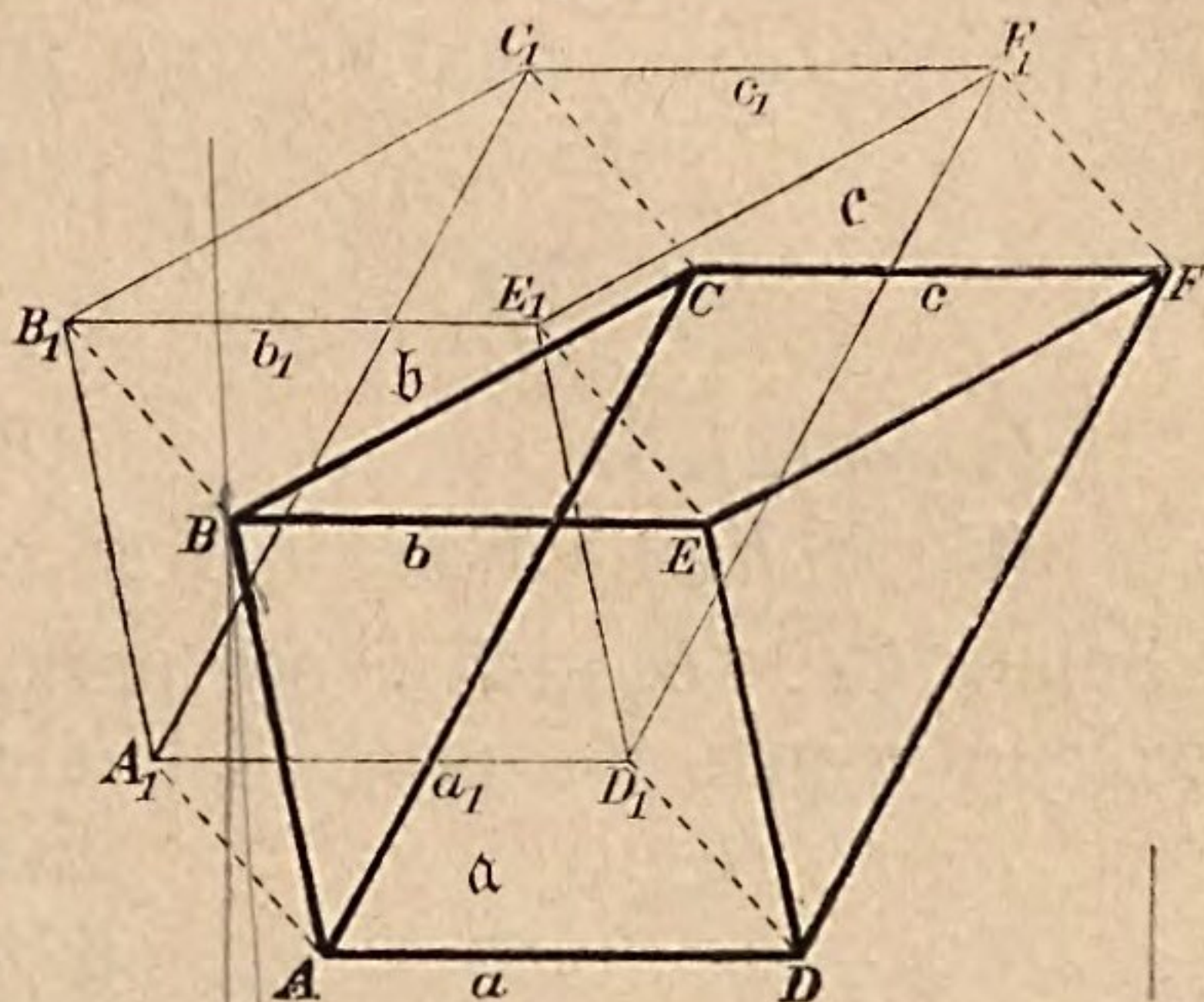
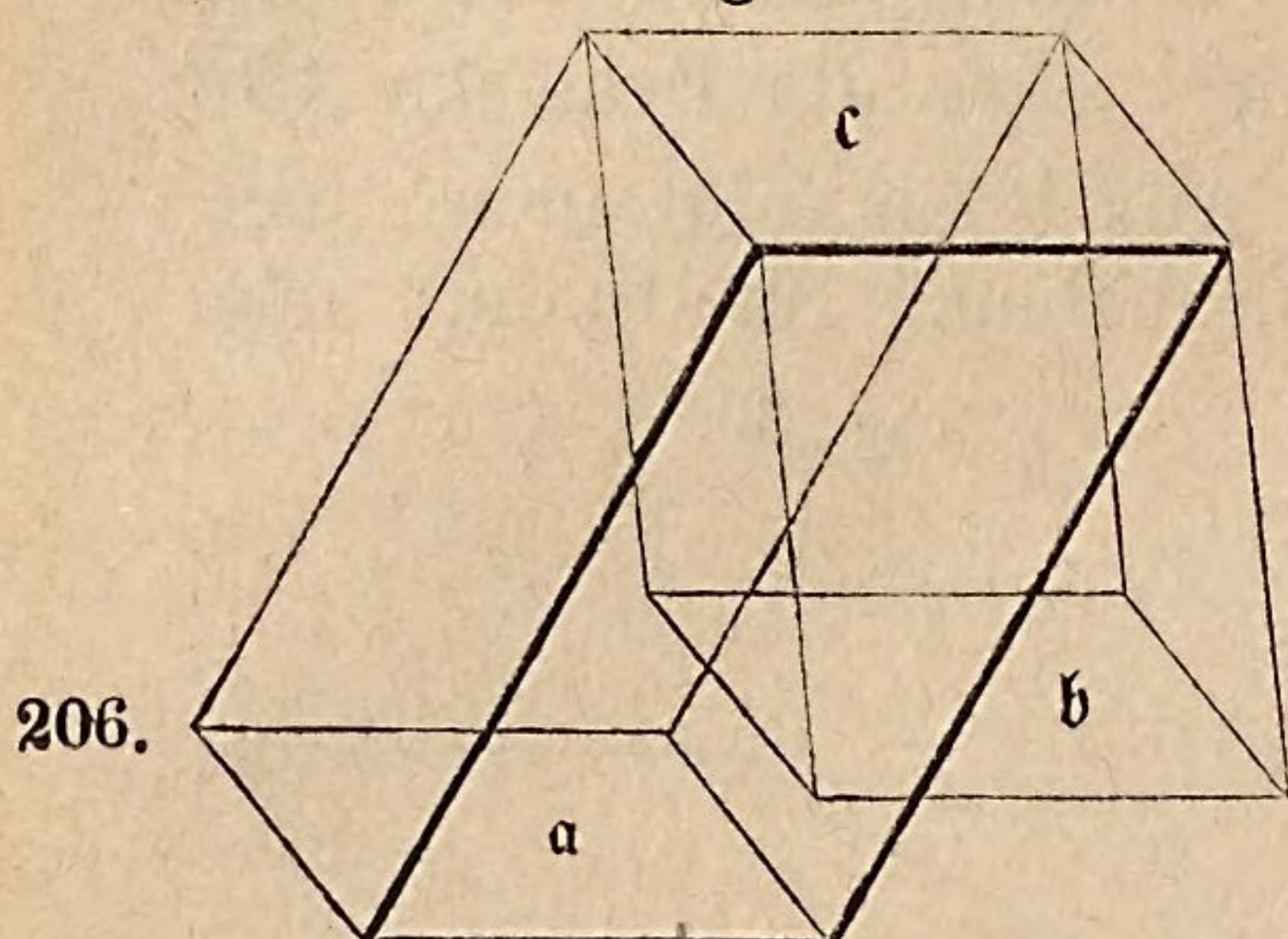




Fig. 40.

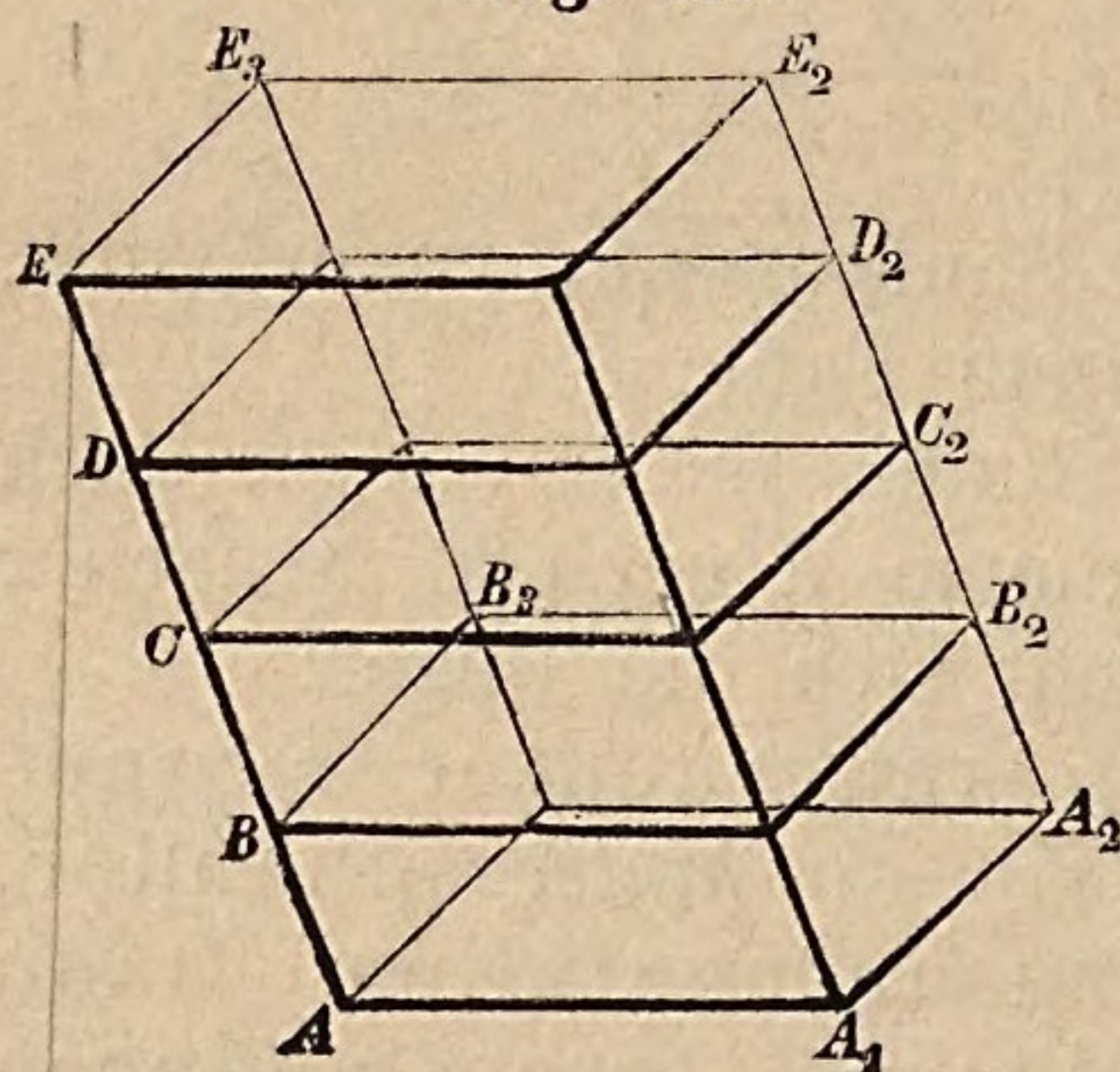


denselben parallelen Ebenen. Umgekehrt ist die Lage zwischen denselben parallelen Ebenen für Säulen mit gleichen\*) Grundflächen ein Zeichen ihrer Inhaltsgleichheit. Da diese Säulen gleiche Höhe haben, so kann man auch sagen:

Säulen mit gleicher Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich.

65. *Multiplikation.* — Addiert man (nach 204)  $n$  kongruente Säulen ( $\overline{A \dots B_2} = \mathfrak{A}$ ), so entsteht eine Säule ( $\overline{A \dots E_2} = \mathfrak{B}$ ), welche  $n$ -mal so gross ist als jede der gegebenen. Durch

Fig. 41.



diese Konstruktion ist also die letztere ( $\mathfrak{A}$ ) mit  $n$  multipliziert, und man hat

$$3) \quad n \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{B}.$$

Da ferner  $AE = n \cdot AB$ , so hat  $\mathfrak{B}$  eine  $n$ -mal so grosse Seitenfläche als  $\mathfrak{A}$ , und, wenn man  $\overline{A \dots A_2}$  als Grundfläche betrachtet, eine  $n$ -mal so grosse Höhe als  $\mathfrak{A}$ . Hieraus folgt (mit Berücksichtigung von 206) der Satz:

207. Säulen mit gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

Betrachtet man  $\overline{A \dots E_3}$  als Grundfläche von  $\mathfrak{B}$  und  $\overline{A \dots B_3}$  als Grundfläche von  $\mathfrak{A}$ , so haben beide Säulen, da sie zwischen denselben parallelen Ebenen liegen, gleiche Höhe, und der vorige Satz lautet jetzt:

208. Säulen mit gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

\*) Die Kongruenz der Grundflächen ist nur Bedingung für die Möglichkeit des Aufeinanderlegens derselben. Nach 203a ist aber die Gleichheit zweier durch Bewegung entstandenen Gebilde nicht von der Kongruenz, sondern nur von der Gleichheit der erzeugenden Gebilde abhängig. Man kann also z. B. die Säule  $ac$  (Fig. 40) durch eine andre mit gleicher Grundfläche ersetzen, entstanden durch gleiche Bewegung (also mit Seitenkanten, die denen der ersten gleich und parallel sind).



66. *Teilung.* — Aus 3) folgt:

$$4) \quad \frac{\mathfrak{B}}{n} = \mathfrak{A}.$$

Da die Strecke  $AE$  durch die Punkte  $B, C, \dots$  in ebensoviele gleiche Teile geteilt wird, wie die Säule  $\overline{A \dots E_2}$  durch die Parallelogramme  $\overline{B \dots B_2}, \overline{C \dots C_2}, \dots$ , so kann man eine gegebene Säule in  $n$  gleiche Teile teilen, indem man eine Kante derselben in  $n$  gleiche Teile zerlegt und durch die Teilpunkte parallele Ebenen zu den angrenzenden Seiten legt.

67. *Messung.* — Aus 3) folgt ferner:

$$5) \quad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = n;$$

d. h.: Der Quotient zweier Säulen (also überhaupt zweier 209. Polyeder) ist eine Zahl.

Durch die Sätze 207 und 208 ist die Messung von Säulen mit gleicher Grundfläche oder Höhe auf die Messung von Strecken (s. T. II, Nr. 20) zurückgeführt; es bleiben also auch alle dort gemachten Bemerkungen über die Masszahl  $n$  in Kraft.

Um zwei beliebige Säulen durch einander zu messen, nehmen wir an, eine Fläche  $m^2$  sei in der Grundfläche der ersten  $p$ -mal, in der der zweiten  $q$ -mal enthalten, und eine Strecke  $m_1$  in der Höhe der ersten  $p_1$ -mal, in der der zweiten  $q_1$ -mal.

Dann verhalten sich die Grundflächen wie  $\frac{p}{q}$ , die Höhen wie  $\frac{p_1}{q_1}$ . — Legt man nun durch die Teilpunkte der Höhen parallele Ebenen zu den Grundflächen, so zerfällt die erste Säule in  $p_1$  gleiche Teile ( $\mathfrak{A}$ ), die zweite in  $q_1$  gleiche Teile ( $\mathfrak{B}$ ). Dann verhält sich nach 208

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{p}{q};$$

also

$$\frac{p_1 \mathfrak{A}}{q_1 \mathfrak{B}} = \frac{pp_1}{qq_1};$$

d. h.: Säulen verhalten sich wie die Produkte aus den 210. Masszahlen von Grundfläche und Höhe.

Anm. 206 ist in 207 und 208, 207 und 208 sind in 210 als spezielle Fälle enthalten.

Setzt man in 5)  $\mathfrak{A} = 1$ , so wird  $\mathfrak{B} = n$ , d. h. auch eine Zahl. Setzt man also irgend eine bestimmte Säule gleich 1,



so kann man alle Säulen (und Polyeder) als Zahlen darstellen. Weiteres hierüber s. in dem Abschnitt über rechnende Stereometrie.

## 2. Säule und dreiseitiges Prisma.

**68. Sätze.** — Ein Diagonalschnitt teilt die Säule in zwei dreiseitige Prismen (179). Da die Grundflächen dieser beiden Prismen einander kongruent sind (T. II, 131), und beide Prismen durch gleiche Bewegungen dieser Grundflächen entstehen, so folgt aus 203a:

- 211. Jeder Diagonalschnitt teilt eine Säule in zwei inhaltsgleiche dreiseitige Prismen.
- 212. Jedes dreiseitige Prisma ist halb so gross als eine Säule von doppelter Grundfläche und gleicher Höhe.
- 213. Dreiseitige Prismen mit gleicher Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich.

Haben zwei  $n$ -seitige Prismen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  gleiche Höhe und Grundfläche, so kann man die eine Grundfläche  $b$  in eine der andern kongruente  $a_1$  verwandeln, und erhält dadurch ein neues Prisma  $\mathfrak{A}_1$ , welches nach 203a mit  $\mathfrak{B}$  inhaltsgleich ist. Dann kann man nach 192 die Prismen  $A$  und  $A_1$  durch Diagonalschnitte in dreiseitige Prismen zerlegen, von denen je zwei nach 213 inhaltsgleich sind. Es sind demnach auch die Prismen  $A$  und  $A_1$ , folglich auch  $A$  und  $B$  inhaltsgleich, und man hat den Satz:

- 214. Prismen mit gleicher Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich.

Anm. Im Satze 203a war angenommen, dass die Bewegungen  $h_1$  und  $h_2$  gleiche und parallele Strecken bedeuteten. Nach 214 lässt sich diese Bedingung für Prismen dahin erweitern, dass  $h_1$  und  $h_2$  nur diejenigen Strecken zu sein brauchen, welche die Grösse der einfachen Verschiebung (T. II, Nr. 27) angeben. Sind diese Strecken gleich, so brauchen die von homologen Punkten der erzeugenden Figuren beschriebenen Strecken nicht gleich und parallel zu sein.

Auch die Sätze 207, 208, 210 gelten nun in Folge von 211 nicht nur für Säulen, sondern auch für dreiseitige Prismen, und in Folge von 192 für beliebige Prismen. Also:

- 215. Prismen mit gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.
- 216. Prismen mit gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.
- 217. Prismen verhalten sich wie die Produkte aus den Masszahlen von Grundfläche und Höhe.



## 3. Dreiseitiges Prisma und Pyramide.

**69. Sätze.** — Schneidet man von zwei ähnlichen 218. Polyedern  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{P}_1$  durch homologe Schnitte zwei ähnliche Polyeder  $\mathfrak{T}$  und  $\mathfrak{T}_1$  ab, so ist nach dem Begriff der Aehnlichkeit  $\mathfrak{T}_1$  der ebensoviele Teil von  $\mathfrak{P}_1$ , wie  $\mathfrak{T}$  von  $\mathfrak{P}$ ; d. h. es ist

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{T}_1} = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{T}}, \text{ oder } \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}} = \frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}}.$$

Anm. Wie lautet der entsprechende Satz der ebenen Geometrie?

Es seien nun drei anstossende Kanten eines dreiseitigen Prismas  $\mathfrak{P} = \overline{B_2 \dots D_3 C_4}$  (Fig. 42) halbiert, so dass  $B_2 B_1 = B_1 B$ ,  $B_2 D_2 = D_2 D$ ,  $B_2 C_2 = C_2 C_3$  ist; und es sei das ähnliche Prisma  $\mathfrak{P}_1 = \overline{B_2 \dots D_1 C_1}$  konstruiert. Dann ist die Grundfläche von  $\mathfrak{P}_1$  ( $B_2 D_2 C_2$ )  $\frac{1}{4}$  der Grundfläche von  $\mathfrak{P}$  (T. II, 359), und die Höhe von  $\mathfrak{P}_1$   $\frac{1}{2}$  der Höhe von  $\mathfrak{P}$ ; also ist nach 217:

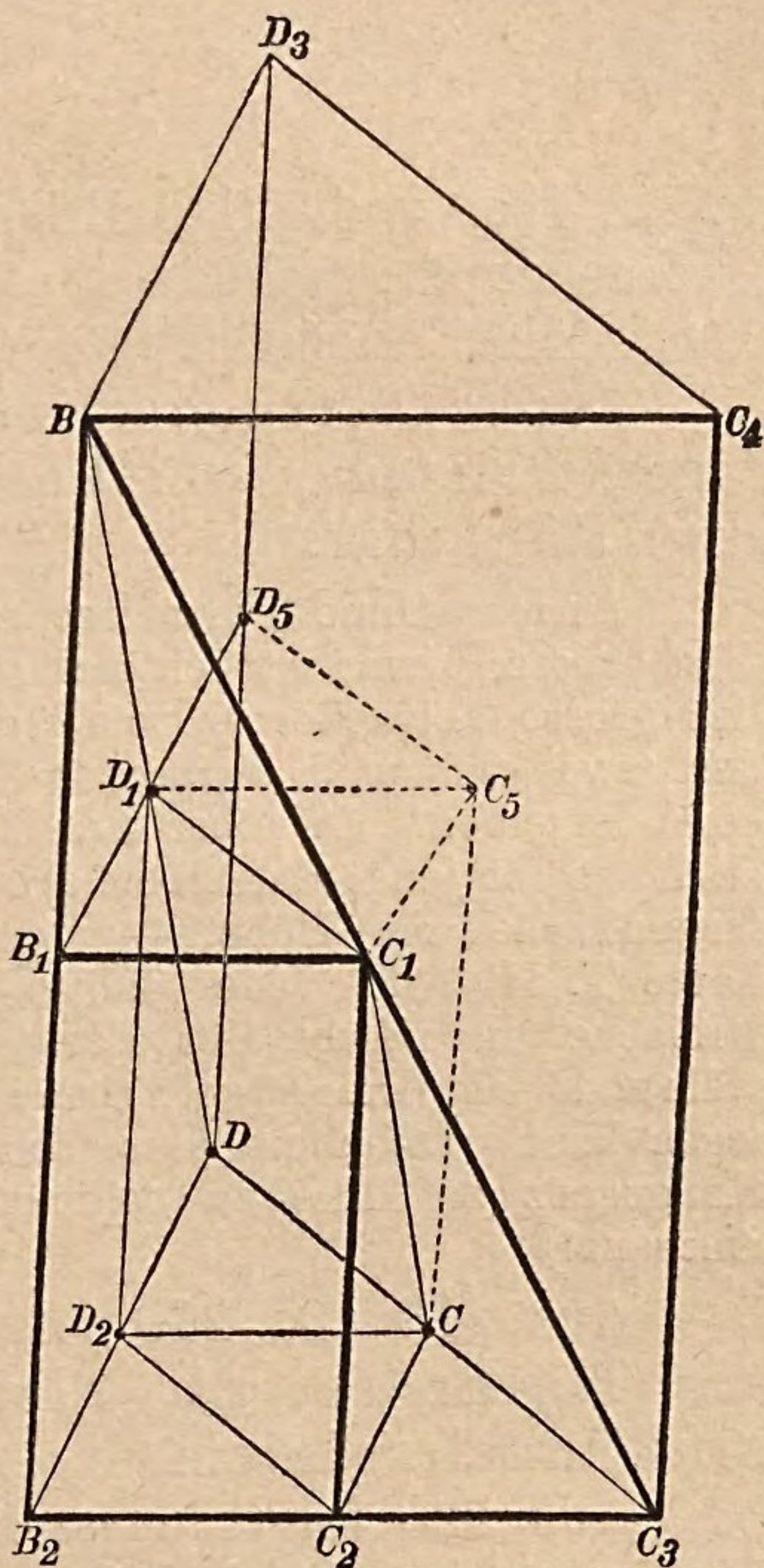
$$1) \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}_1} = \frac{8}{1}.$$

Schneidet man ferner von dem Prisma  $\mathfrak{P}$  durch die Ebene  $\overline{BDC_3}$  das Tetraeder  $\mathfrak{T} = \overline{BB_2 C_3 D}$  ab, und von dem Prisma  $\mathfrak{P}_1$  durch die homologe Ebene  $\overline{B_1 D_2 C_2}$  das Tetraeder  $\mathfrak{T}_1 = \overline{B_1 B_2 C_2 D_2}$  ( $\cong \overline{BB_1 C_1 D_1}$ ), so ist nach 1) und 218

$$2) \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1} = \frac{8}{1}; \text{ oder } \mathfrak{T} = 8 \mathfrak{T}_1.$$

Nun zerfällt das Tetraeder  $\mathfrak{T}$  nach 169a in die beiden mit  $\mathfrak{T}_1$  kongruenten Tetraeder  $\overline{BB_1 D_1 C_1}$  und  $\overline{C_1 C_2 C_3 C}$ , und die beiden Prismen  $\overline{B_2 \dots D_1 C_1}$  ( $= \mathfrak{P}_1$ ) und  $\overline{C_1 \dots DD_2}$ . Ersteres ist die Hälfte der Säule  $\overline{B_2 \dots C_5}$  (212), letzteres die Hälfte der Säule  $\overline{C_2 \dots D_5}$ . Da beide Säulen nach 206 inhaltsgleich sind, so ist auch

Fig. 42.





$$\overline{B_2 \dots D_1 C_1} = \overline{C_1 \dots D D_2} = \mathfrak{P}_1;$$

also 3)  $\mathfrak{T} = 2 \mathfrak{T}_1 + 2 \mathfrak{P}_1.$

Setzt man 3) in 2) ein, so folgt:

$$2 \mathfrak{T}_1 + 2 \mathfrak{P}_1 = 8 \mathfrak{T}_1;$$

$$2 \mathfrak{P}_1 = 6 \mathfrak{T}_1;$$

$$\mathfrak{P}_1 = 3 \mathfrak{T}_1;$$

d. h.: Das dreiseitige Prisma  $\mathfrak{P}_1$  ist dreimal so gross als das Tetraeder  $\mathfrak{T}_1$ , welches dieselbe Grundfläche und Höhe mit ihm hat. Mit Berücksichtigung von 214 kann man nun sagen:

219. Jedes Tetraeder ist der dritte Teil eines dreiseitigen Prismas, welches mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Anm. Ohne Formelrechnung lautet die Ableitung des Satzes so: Das grosse Prisma ist achtmal so gross als das kleine, also nach 218 auch das grosse Tetraeder achtmal so gross als das kleine, oder, nach Abzug der zwei kleinen kongruenten Tetraeder, der Rest sechsmal so gross als eins derselben. Da aber der Rest aus zwei inhaltsgleichen Prismen besteht, so ist jedes derselben dreimal so gross als das Tetraeder mit gleicher Grundfläche und Höhe. — Der Satz 219 entspricht dem geometrischen Satze T. II, 141. Jener folgte aber unmittelbar aus der Kongruenz der Dreiecke, in welche das Parallelogramm durch eine Diagonale zerfällt, während das dreiseitige Prisma sich nicht in kongruente Tetraeder zerlegen lässt. Offenbar lässt sich auch jener geometrische Satz, ohne die Kongruenz zu Hilfe zu nehmen, ebenso wie 219 ableiten. (Man führe dies aus!)

Aus 213 und 219 folgt:

220. Tetraeder mit gleicher Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich.

Aus 220 folgt, dass die drei Tetraeder, in welche nach 169 jedes dreiseitige Prisma geteilt werden kann, inhaltsgleich sind. Es ist nämlich, wenn man in jedem Tetraeder den ersten Buchstaben als Spitze betrachtet (s. Fig. 33):

$$\overline{C_1 ABC} = \overline{B A_1 B_1 C_1}, \text{ und } \overline{C_1 A_1 B_1 B} = \overline{C_1 A_1 AB}.$$

Satz 169 lautet daher vervollständigt:

221. Zwei durch ein Paar Gegenecken gelegte Diagonalschnitte teilen das dreiseitige Prisma in 3 inhaltsgleiche Tetraeder.

Anm. Der entsprechende geometrische Satz ist T. II, 131.

Aus 216 und 219 folgt:

Tetraeder mit gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen. Nach 154 kann jede  $n$ -seitige Pyramide in Tetraeder von gleicher Höhe zerlegt werden. Haben nun zwei  $n$ -seitige



Pyramiden  $\mathfrak{T}$  und  $\mathfrak{T}'$  gleiche Grundfläche und Höhe, und ist die erste in die Tetraeder  $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \dots$ , die zweite in die Tetraeder  $\mathfrak{T}'_1, \mathfrak{T}'_2, \dots$  geteilt, so ist, wenn die Grundflächen durch  $a$  bezeichnet werden, nach dem letzten Satze:

$$\mathfrak{T}_1 : \mathfrak{T}_2 : \mathfrak{T}_3 \dots = a_1 : a_2 : a_3 \dots; \quad \mathfrak{T}'_1 : \mathfrak{T}'_2 : \mathfrak{T}'_3 \dots = a'_1 : a'_2 : a'_3 \dots$$

$$\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}'_1} = \frac{a_1}{a'_1}; \quad \frac{\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}'_2} = \frac{a_2}{a'_2}; \quad \dots;$$

folglich (T. I, 108):

$$\frac{\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + \dots}{\mathfrak{T}'_1 + \mathfrak{T}'_2 + \dots} = \frac{a_1 + a_2 + \dots}{a'_1 + a'_2 + \dots}.$$

Da nun  $a_1 + a_2 + \dots = a'_1 + a'_2 + \dots$ ,

so ist auch  $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + \dots = \mathfrak{T}'_1 + \mathfrak{T}'_2 + \dots$ ;

d. h.: Pyramiden mit gleicher Grundfläche und Höhe 222. sind inhaltsgleich.

Auch die Sätze 215, 216, 217 gelten nun in Folge von 219 nicht nur für dreiseitige Prismen, sondern auch für Tetraeder, und in Folge von 154 für beliebige Pyramiden. Also:

Pyramiden mit gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen. 223.

Pyramiden mit gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen. 224.

Pyramiden verhalten sich wie die Produkte aus 225. den Masszahlen von Grundfläche und Höhe.

Endlich folgt noch aus 219:

Jede Pyramide ist der dritte Teil eines Prismas, 226. welches mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat.

**70. Rückblick.** — Die in Nr. 62—69 enthaltenen Sätze lassen mehrfache Analogieen zwischen Gebilden der Ebene und des Raumes erkennen. Erstens entspricht dem Parallelogramm die Säule, dem Dreieck einerseits das dreiseitige Prisma, andererseits das Tetraeder. Zweitens aber entspricht dem Parallelogramm das allgemeine Prisma, und dem Dreieck die allgemeine Pyramide. — Ein vollkommenes Entsprechen findet statt zwischen Parallelogramm und Säule, sowie zwischen Dreieck und Tetraeder. Das dreiseitige Prisma steht zwischen beiden Körpern in der Mitte, indem es sowohl dem Parallelogramm wie dem Dreieck entspricht.



## 2) Seitenänderung der Figur.

### a) Bewegung des Polygons: Der Rotationskörper.

**71. Bewegung des rechtwinkligen Dreiecks: Der gerade Kegel.** — Macht ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten eine ganze Umdrehung, so beschreibt die andere Kathete die Grundfläche (42) und die Hypotenuse den Mantel eines geraden Kegels (Nr. 47). — Macht ein beliebiges Dreieck um eine seiner Seiten eine ganze Umdrehung, so entsteht ein Körper, welcher gleich der Differenz oder Summe zweier gerader Kegel ist, je nachdem an der Drehungsaxe ein stumpfer Winkel anliegt oder nicht.

Anm. Der Fall, dass die Drehungsaxe nicht mit einer Seite zusammenfällt, wird für Nr. 71—73 später behandelt (Nr. 120 und 121).

**72. Bewegung des Rechtecks: Der gerade Cylinder.** — Macht ein Rechteck um eine seiner Seiten eine ganze Umdrehung, so beschreibt die Gegenseite den Mantel (Nr. 59) und die beiden anderen Seiten die Grundflächen eines geraden Cylinders (42). — Macht ein beliebiges Parallelogramm eine ganze Umdrehung um eine seiner Seiten, so entsteht ein Körper, welcher gleich dem von der Gegenseite der Drehungsaxe beschriebenen Cylinder ( $\mathfrak{A}$ ) ist, da er aus  $\mathfrak{A}$  und zwei kongruenten Kegeln ( $\mathfrak{B}$ ) in der Form  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{B}$  zusammengesetzt ist.

**73. Bewegung eines Trapezes: Der gerade Kegelstumpf.** — Macht ein Trapez mit zwei rechten Winkeln eine ganze Umdrehung um die den rechten Winkeln anliegende Seite, so beschreibt die Gegenseite den Mantel (Nr. 48) und die beiden anderen Seiten die Grundflächen eines geraden Kegelstumpfes (42). — Da das rechtwinklige Dreieck und das Rechteck specielle Fälle des Trapezes sind (T. II, Nr. 78 und Nr. 110, letzte Anm.), so sind auch der gerade Kegel und der gerade Cylinder specielle Fälle des geraden Kegelstumpfes.

**74. Bewegung eines Polygons: Der Rotationskörper.** — Ist ein  $n$ -Eck gegeben, welches sich um eine in seiner Ebene liegende, seine Fläche nicht schneidende Axe drehen soll, so fällt man von seinen Ecken  $A, B, \dots$  die Senkrechten  $AA_1, BB_1, \dots$  auf die Axe (Fig. 43). Dadurch entstehen die Trapeze  $\overline{ABA_1B_1}, \overline{BCB_1C_1}, \dots$ . Nimmt man nun jede Seite des Polygons in derjenigen Richtung, in welcher sie beim Durchlaufen des ganzen Umfanges zurückgelegt wird, und betrachtet diejenigen Projektionen der Seiten, welche mit der Drehungsaxe



gleich gerichtet sind ( $A_1B_1, B_1C_1$ ), als positiv, diejenigen mit entgegengesetzter Richtung ( $C_1D_1, D_1E_1, E_1A_1$ ) als negativ, so sind die Flächen der Trapeze positiv oder negativ, je nachdem es ihre Höhen sind, und die Volumina der von den Trapezen beschriebenen Kegelstumpfe positiv oder negativ, je nachdem es die Flächen der erzeugenden Trapeze sind. Unter dieser Voraussetzung ist das Volumen des Rotationskörpers gleich der Summe der Volumina jener Kegelstumpfe. Also:

Jeder Körper, welcher durch Rotation eines Polygons um eine in seiner Ebene liegende, seine Fläche nicht schneidende Axe entsteht, lässt sich als Summe von Kegelstumpfen betrachten.

Der Inhalt eines Trapezes, also auch des von ihm beschriebenen Kegelstumpfes, wird Null, wenn die in dem Trapez vorkommende Polygonseite auf der Axe senkrecht steht oder mit ihr zusammenfällt.

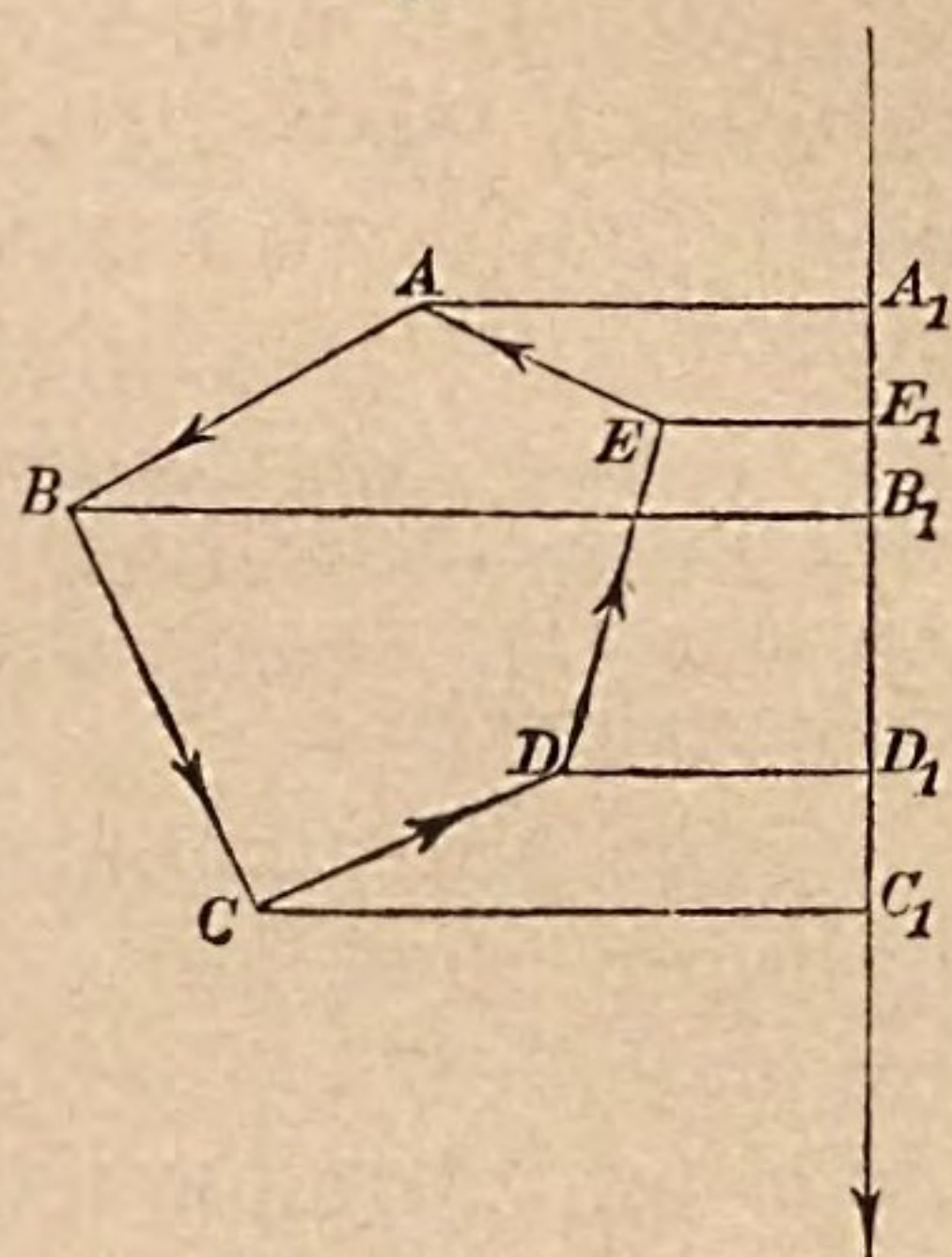
Wenn die Drehungsaxe die Fläche des Polygons schneidet, so teilt sie das Polygon in zwei Polygone, deren jedes für sich einen Rotationskörper beschreibt. Sind die beiden Polygone symmetrisch, so sind die beiden Rotationskörper kongruent. Spezielle Fälle: Drehung eines regelmässigen Polygons von ungerader Seitenzahl um eine durch eine Ecke und seinen Mittelpunkt gehende Axe. Drehung eines regelmässigen Polygons, dessen Seitenzahl durch 2 oder 4 teilbar ist, um einen grossen oder kleinen Durchmesser.

Anm. Man untersuche die besonderen Formen von Kegelstumpfen, welche in den drei einzelnen Fällen auftreten.

#### b) Bewegung des Halbkreises: Die Kugel.

**75. Entstehung der Kugel.** — Wenn eine Halbkreisfläche sich um ihren Durchmesser dreht, so beschreibt sie einen Körper, welcher Kugel heisst, wenn sie eine ganze Umdrehung macht, Kugelausschnitt (Sektor), wenn die Drehung diese Grösse nicht erreicht. — Die Kugel ist vollständig begrenzt durch die Kugelfläche, der Kugelausschnitt durch ein Kugelzweieck und zwei Halbkreisflächen (halbe Diametralkreise, siehe Nr. 22).

Fig. 43.



227.



Durch ihre Drehung beschreibt die Halbkreisfläche einen Flächenwinkel (Centriwinkel des Sektors), welcher ebenso wie der Sektor selbst als Mass der Drehung betrachtet werden kann. Hieraus folgen die Sätze:

228. Zu gleichen Centriwinkeln in derselben Kugel gehören gleiche Sektoren (und umgekehrt). — Zu dem grösseren von zwei Centriwinkeln einer Kugel gehört der grössere Sektor (und umgekehrt).

Anm. Zwei in demselben Durchmesser sich schneidende halbe Diametralkreise einer Kugel teilen dieselbe in zwei Sektoren, von denen der eine einen konkaven, der andere den zu  $4R$  ergänzenden konvexen Centriwinkel enthält.

Da alle Diametralkreise einer Kugel kongruent sind (80), so kann die Hälfte eines jeden derselben als das die Kugel erzeugende Gebilde angesehen werden. Aus 228 folgen daher nicht nur für die durch die angenommene Drehungsaxe gehenden, sondern für alle Diametralkreise die Sätze:

229. Jeder Diametralkreis halbiert die Kugel. — Zwei auf einander senkrecht stehende Diametralkreise teilen die Kugel in vier, drei auf einander senkrecht stehende Diametralkreise in acht gleiche Teile.

Wenn ein Kreissektor um einen der ihn begrenzenden Radien eine ganze Umdrehung macht, so beschreibt er einen Teil der Kugel, welcher Kugelkegel genannt werden mag. Derselbe ist vollständig begrenzt durch den Mantel eines geraden Kegels (Nr. 47) und durch einen Teil einer Kugelfläche.

Anm. Analog würde der Kreissektor „Kreisdreieck“ zu nennen sein. — Jede aus dem Mittelpunkt einer Kugel als Spitze beschriebene gemeine Kegelfläche teilt die Kugel in zwei Kugelkegel. — Die Halbkugel kann als Kugelausschnitt mit gestrecktem Centriwinkel, oder als Kugelkegel mit gestrecktem Winkel an der Spitze der Kegelfläche angesehen werden.

Wir betrachten nun die Kugel der Reihe nach in Verbindung mit Punkt, Ebene und Körper.

**76. Kugel und Punkt.** — Ein Punkt kann auf oder ausserhalb der Kugelfläche liegen. Im zweiten Falle kann er wieder in oder ausserhalb der Kugel liegen. Verbindet man in jedem der hieraus folgenden 3 verschiedenen Fälle den Punkt mit dem Mittelpunkte der Kugel, so ergibt sich unmittelbar der Satz:

230. Ein Punkt liegt in der Kugel, auf der Kugelfläche oder ausserhalb der Kugel, je nachdem seine Entfernung vom Mittelpunkte kleiner, gleichgross



oder grösser als der Radius der Kugel ist (und umgekehrt).

77. *Kugel und Ebene.* —  $\alpha$ ) *Sekantenebenen.* — Wenn eine Kugelfläche von einer Ebene geschnitten wird, so sind alle Punkte der Schnittlinie von dem Mittelpunkte der Kugel gleichweit entfernt (81), also auch gleichweit entfernt von dem Fusspunkte der vom Mittelpunkt auf die Ebene gefällten Senkrechten (155a). — Daher ist die Schnittlinie eine Kreislinie, welche jenen Fusspunkt zum Mittelpunkt hat (s. Fig. 15, S. 31), und man hat den Satz:

Eine Kugelfläche wird von jeder sie schneiden- 231.  
den Ebene in einer Kreislinie geschnitten.

Eine Ebene, welche die Kugelfläche schneidet, heisst Sekantenebene. Jeder Schnittkreis der Kugel teilt dieselbe in zwei Körper, welche Kugelhappen genannt werden. Eine Kugelhappe ist vollständig begrenzt durch einen Teil der Kugelfläche und eine Kreisfläche. Durch den Grundkreis einer aus dem Kugelmittelpunkte beschriebenen Kegelfläche wird der eine Kugelkegel als Summe, der andere als Differenz einer Kugelhappe und eines Kegels dargestellt.

Anm. Die Halbkugel ist gleichzeitig Kugelkegel und Kugelhappe. Warum?

Ueberträgt man die Umkehrungssätze von 160a auf den aus dem Kugelmittelpunkte beschriebenen Kegel, so lauten dieselben:

Verbindet man den Kugelmittelpunkt mit dem 232.  
Mittelpunkte eines Schnittkreises, so steht die Verbindungslinie senkrecht auf dem Schnittkreise.

Fällt man vom Kugelmittelpunkte eine Senk- 233.  
rechte auf einen Schnittkreis, so geht dieselbe durch den Mittelpunkt des Schnittkreises.

Errichtet man im Mittelpunkte eines Schnitt- 234.  
kreises eine Senkrechte, so geht dieselbe durch den Kugelmittelpunkt.

Aus 155b folgt:

Der Abstand einer Sekantenebene vom Mittel- 234a.  
punkte der Kugel ist kleiner als der Radius.

Und umgekehrt:

Eine Ebene schneidet die Kugel, wenn ihr Ab- 235.  
stand vom Mittelpunkte kleiner als der Radius ist.

Gleiche Schnittkreise einer Kugel haben gleichen 236.  
Abstand vom Mittelpunkte (T. II, 105).



237. Der grössere von zwei Schnittkreisen einer Kugel hat den kleineren Abstand vom Mittelpunkte (und umgekehrt) (T. II, 173).

Aus der Umkehrung von 237 folgt:

238. Unter allen Schnittkreisen einer Kugel sind die Diametralkreise die grössten.

78.  $\beta$ ) *Tangentenebenen*. — Wenn eine Sekantenebene sich so verschiebt, dass ihr Abstand vom Mittelpunkte grösser wird, so wird der in ihr liegende Schnittkreis kleiner (237), und die Kreislinie, welche die Sekantenebene mit der Kugelfläche gemeinsam hat, geht endlich in einen Punkt über.

Eine Ebene, welche mit der Kugelfläche nur einen Punkt gemeinsam hat, heisst Tangentenebene derselben. Man sagt, sie berühre die Kugelfläche in dem gemeinsamen Punkte (Berührungspunkte).

Wie die Kreislinie selbst, so geht auch ihr Mittelpunkt in den Berührungspunkt über; d. h.: die Verbindungslinie des Kugelmittelpunktes mit dem Mittelpunkte des Schnittkreises ist ein Kugelradius. Und da diese Verbindungslinie beständig auf der Sekantenebene senkrecht steht (232), also ihren Abstand vom Kugelmittelpunkte angiebt, so folgt weiter:

239. Der Abstand einer Tangentenebene vom Mittelpunkte der Kugel ist gleich dem Radius.

Und umgekehrt:

240. Eine Ebene berührt die Kugel in einem Punkte, wenn ihr Abstand vom Mittelpunkte gleich dem Radius ist.

Anm. Hieraus folgt die Konstruktion der Tangentenebene in einem gegebenen Punkte  $C$  der Kugelfläche. Man verbinde den Kugelmittelpunkt  $O$  mit  $C$  und lege durch  $C$  die zu  $OC$  senkrechte Ebene. Diese ist die gesuchte.

241. Eine Ebene hat keinen Punkt mit der Kugelfläche gemeinsam, wenn ihr Abstand vom Mittelpunkte grösser ist als der Radius (155b, 230).

Da die Tangentenebene nur ein specieller Fall der Sekantenebene ist, nämlich eine Sekantenebene, deren Schnittlinie in einen Punkt übergegangen ist, so liefert jeder Satz über eine Sekantenebene einen entsprechenden über eine Tangentenebene. Aus den Sätzen 232—234 folgt hiernach:

242. Verbindet man den Kugelmittelpunkt mit dem Berührungspunkt einer Tangentenebene, so steht dieser Radius auf der Tangentenebene senkrecht,



Fällt man vom Kugelmittelpunkt auf eine Tangentenebene eine Senkrechte, so geht dieselbe durch den Berührungspunkt. 243.

Errichtet man auf einer Tangentenebene im Berührungspunkt eine Senkrechte, so geht dieselbe durch den Kugelmittelpunkt. 244.

Zwei an dieselbe Kugelfläche gelegte Tangentenebenen schneiden sich in einer die Kugelfläche nicht schneidenden Geraden. Da dieselbe durch zwei ihrer Punkte vollkommen bestimmt ist, so hat man die Sätze:

Durch eine die Kugelfläche nicht schneidende Gerade (oder durch zwei Punkte, deren Verbindungs- 245.  
linie die Kugelfläche nicht schneidet) lassen sich zwei Tangentenebenen an die Kugelfläche legen.

Durch einen ausserhalb der Kugelfläche liegenden Punkt lassen sich an die Kugel beliebig viele 246.  
Tangentenebenen legen, deren Berührungspunkte auf einer Kreislinie liegen.

Macht ein Kreis um die Verbindungs-  
linie seines Mittelpunktes  $O$  mit dem  
Schnittpunkte  $C$  zweier Tangenten eine  
halbe Umdrehung (Fig. 44), so beschreibt  
der Kreis eine Kugel, die beiden Berüh-  
rungspunkte  $A$  und  $B$  einen Kreis, und  
die beiden Tangenten  $CA$  und  $CB$  eine  
gemeine Kegelfläche, welche die Kugel  
in jener Kreislinie berührt. Also:

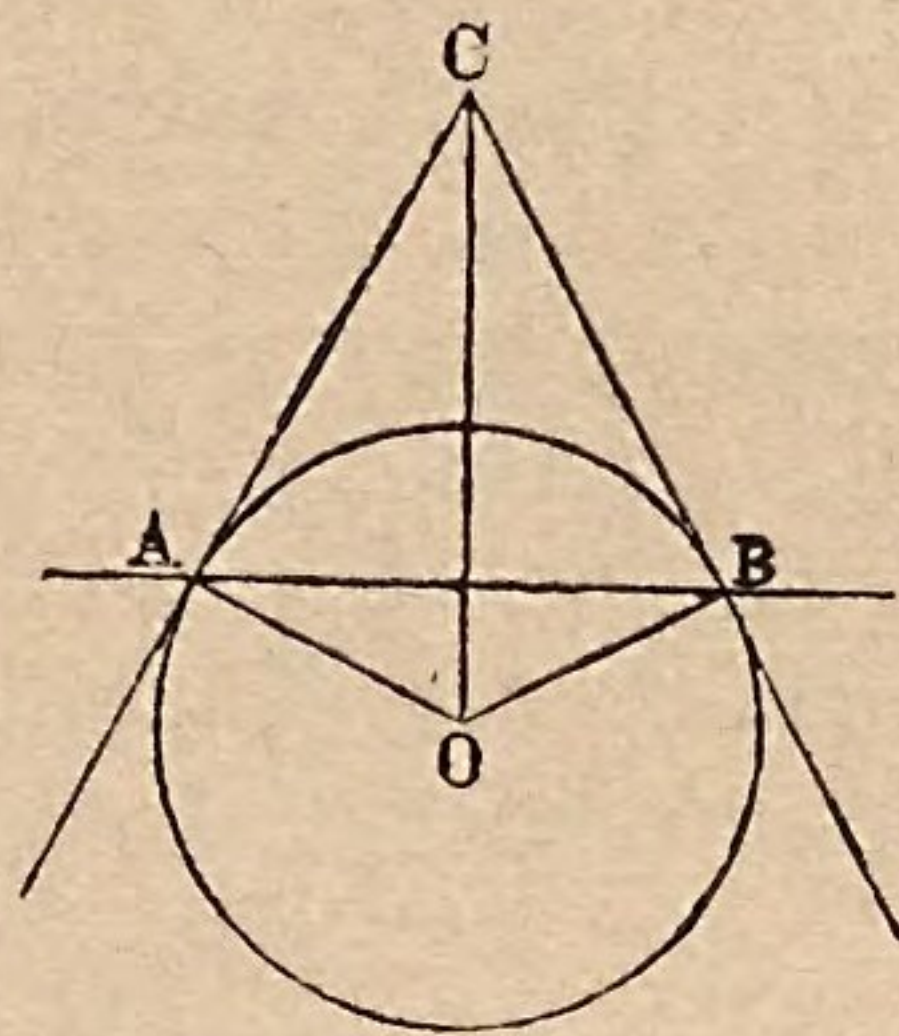
An jede Kugel lässt sich ein Be-  
rührungskegel legen, dessen Spitze  
ein ausserhalb der Kugel gegebener Punkt ist, und  
dessen Tangentenebenen gleichzeitig Tangenten-  
ebenen der Kugel sind.

Rückt die Spitze des Kegels in unendliche Entfernung,  
so verwandelt sich die Kugelfläche in eine Cylinderfläche, und  
der letzte Satz erhält die Form:

An jede Kugel lässt sich ein Berührungscylinder 248.  
legen, dessen Axe einer gegebenen Geraden parallel  
ist, und dessen Tangentenebenen gleichzeitig Tan-  
gentenebenen der Kugel sind.

Anm. Der Berührungskreis zwischen Kugel und Cylinder ist Dia-  
metralkreis. — Was wird aus den beiden Tangentenebenen in 245, wenn  
die gegebene Gerade die Kugelfläche berührt? — Was wird aus dem Be-

Fig. 44.



247.



rührungskegel in 247, wenn seine Spitze auf der Kugelfläche liegt? — Um durch eine gegebene Gerade an eine Kugelfläche die Tangentenebenen zu legen, lege man den auf der gegebenen Geraden senkrecht stehenden Diametralschnitt, welcher die gegebene Gerade in  $C$  schneidet. Dann sind die Berührungspunkte der aus  $C$  an den Diametralkreis gezogenen Tangenten  $CA$  und  $CB$  (Fig. 44) gleichzeitig die Berührungspunkte der gesuchten Tangentenebenen. (Warum?)

Aus Fig. 44 ist ferner ersichtlich:

249. Der Winkel zweier Tangentenebenen wird durch die Ebene halbiert, welche durch ihre Axe und den Kugelmittelpunkt gelegt ist.
250. Und umgekehrt: Die Halbierungsebene des Winkels zweier Ebenen geht durch den Mittelpunkt jeder der beiden Ebenen berührenden Kugeln.

Anm. Punkt und Ebene stehen der Kugelfläche gegenüber im Verhältnis der Reciprocität. Vgl. T. II, Nr. 93.

**79. Konstruktion einer Kugel aus gegebenen Bedingungen.** — *Vorbemerkung.* — Von einer Kugel ist die Grösse und Gestalt bestimmt, wenn man ihren Radius, und die Lage, wenn man ihren Mittelpunkt kennt. Zur Bestimmung des letzteren sind drei geometrische Oerter erforderlich, d. h. drei Flächen, welche einen Punkt gemeinsam haben. Man kann solche Oerter finden, wenn man die Bedingung stellt, dass die Kugelfläche durch gegebene Punkte gehen oder gegebene Ebenen berühren soll. (Andere Bedingungen lassen sich nach Analogie mit T. II, Nr. 106 aufstellen. S. Nr. 89.) Demnach sind Radius, Punkt der Kugelfläche und Tangentenebene die zur Bestimmung des Mittelpunktes einer Kugel dienenden Elemente.

Ist der Mittelpunkt einer Kugel bestimmt, so kennt man auch den Radius (wenn er nicht schon unter den gegebenen Elementen war); nämlich entweder als Verbindungsstrecke des Mittelpunktes mit einem gegebenen Punkte der Kugelfläche, oder als Senkrechte, die vom Mittelpunkte auf eine gegebene Tangentenebene gefällt wird.

Ist zur Konstruktion einer Kugel nur eine Bedingung gegeben, so kann jeder Punkt des Raumes Mittelpunkt einer Kugel werden, welche dieser Bedingung genügt. — Sind zwei Bedingungen gegeben, so existiert für den Mittelpunkt der Kugel eine Fläche als geometrischer Ort. Bezeichnet man Punkte, durch welche die Kugelfläche gehen soll, durch  $A, B, \dots$ , Ebenen, welche sie berühren soll, durch  $a, b, \dots$ , den Radius durch  $r$ , so sind folgende Zusammenstellungen von je zweien dieser Gebilde möglich: 1)  $AB$ , 2)  $Ar$ , 3)  $Aa$ , 4)  $ab$ , 5)  $ar$ .



Im dritten Fall ist zu unterscheiden, ob der Punkt  $A$  auf der Ebene  $\alpha$  liegt oder nicht; im vierten, ob die Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  parallel sind oder sich schneiden.

**80. Sätze über den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugel.** — 1) Soll eine Kugelfläche *durch zwei gegebene Punkte* 251. *gehen*, so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die auf der Verbindungsstrecke der Punkte in ihrer Mitte senkrecht konstruierte Ebene (73).

2) Soll eine Kugelfläche *mit gegebenem Radius durch* 252. *einen gegebenen Punkt gehen*, so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die mit dem Radius aus dem Punkte beschriebene Kugelfläche (81).

3a) Soll eine Kugelfläche *eine gegebene Ebene in einem* 253. *gegebenen Punkte berühren*, so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die auf der Ebene in dem Punkte errichtete Senkrechte.\*)

Anm. Liegt der Punkt nicht auf der Ebene, so ist der geometrische Ort weder eine Ebene, noch eine Kugelfläche, sondern eine andere krumme Fläche, die später betrachtet wird (Rotationsparaboloid).

4a) Soll eine Kugelfläche *zwei parallele Ebenen berüh-* 254. *ren*, so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die von beiden gleichweit entfernte parallele Ebene.

Anm. Man beachte, dass durch  $\alpha$  und  $\beta$  auch der Radius der Kugelfläche gegeben ist.

4b) Soll eine Kugelfläche *zwei sich schneidende Ebenen* 255. *berühren*, so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes das Ebenenpaar, welches die Winkel der Ebenen halbiert (76).

5) Soll eine Kugelfläche *mit gegebenem Radius eine ge-* 256. *gebene Ebene berühren*, so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes das in der Entfernung des Radius zu der Ebene parallel gelegte Ebenenpaar.

**81. Sätze von drei Flächen, die sich in derselben Linie schneiden.** — Sind zur Konstruktion einer Kugel drei Bedingungen gegeben, so liefern je zwei davon einen geometrischen Ort für den Mittelpunkt. Man erhält also drei geometrische Oerter. Da nun der Mittelpunkt gleichzeitig auf allen dreien liegen muss, so schneiden die drei Oerter sich stets in derselben Linie. Aus jeder derartigen Konstruktionsaufgabe geht

---

\*) Diese Senkrechte ist als Ausartung der in der Anm. erwähnten Fläche anzusehen. Warum?



also ein Satz hervor, welcher aussagt, dass drei Flächen sich in derselben Linie schneiden. Am wichtigsten sind die Fälle  $ABC$  und  $abc$ .

Anm. Befindet sich unter den drei gegebenen Stücken eine Tangentenebene und der Berührungspunkt, so artet der eine geometrische Ort in eine Linie aus (253), und die Schnittlinie der drei geometrischen Oerter in einen Punkt. In diesem Falle ist also die Kugel bereits durch drei Stücke vollkommen bestimmt (Beispiel:  $\alpha Ar$ ). — Da die geometrischen Oerter zum Teil Ebenenpaare sind, so kann die Zahl der Schnittlinien 1, 2, 4 betragen.

Betrachtet man die Punkte  $A, B, C$  als Ecken eines Dreiecks, so erhält man den Satz:

257. Die in den Mitten der Seiten eines Dreiecks senkrecht errichteten Ebenen schneiden sich in *einer* Geraden.

Betrachtet man die Ebenen  $\alpha, b, c$  als Seiten einer dreiseitigen Ecke, so folgen die Sätze:

258. Die Ebenen, welche die Winkel einer dreiseitigen Ecke halbieren, schneiden sich in *einer* Geraden.

259. Die Ebenen, welche zwei Aussenwinkel und den dritten Innenwinkel einer dreiseitigen Ecke halbieren, schneiden sich in *einer* Geraden.

Die Halbierungsebenen der Aussenwinkel einer dreiseitigen Ecke ( $abc$ ) bilden eine neue dreiseitige Ecke ( $\alpha_1 b_1 c_1$ ), und stehen der Reihe nach auf den Halbierungsebenen der Innenwinkel senkrecht (Nr. 24; T. II, Anm. z. 122). Nennt man diese letzteren Ebenen die Höhenebenen der Ecke ( $\alpha_1 b_1 c_1$ ), so lautet der Satz 258:

260. Die Höhenebenen einer dreiseitigen Ecke schneiden sich in einer Geraden.

82. *Sätze von vier Linien, die sich in demselben Punkte schneiden.* — Sind zur Konstruktion einer Kugel vier Bedingungen gegeben, so liefern je drei derselben eine Linie als geometrischen Ort für den Mittelpunkt. Man erhält also vier geometrische Oerter. Da der Mittelpunkt auf allen gleichzeitig liegen muss, so gehen die vier Oerter stets durch denselben Punkt. Aus jeder derartigen Konstruktionsaufgabe geht also ein Satz hervor, welcher aussagt, dass vier Linien sich in demselben Punkte schneiden. Am wichtigsten sind die Fälle  $ABCD$  und  $abcd$ .

Betrachtet man die Punkte  $A, B, C, D$  als Eckpunkte eines Tetraeders, so erhält man den Satz:

261. Errichtet man auf jeder Seite eines Tetraeders



im Mittelpunkte des Umkreises die Senkrechte, so schneiden sich diese vier Senkrechten in *einem* Punkte (257, 74).

Betrachtet man die Ebenen  $a, b, c, d$  als Seiten eines Tetraeders, so folgt der Satz:

Konstruiert man für jede Ecke eines Tetraeders 262. die Gerade, in welcher die Halbierungsebenen ihrer Winkel sich schneiden, so schneiden sich diese vier Geraden in *einem* Punkte (258).

Anm. Bezeichnet man die Erweiterungen der Tetraederseiten  $a, b, c, d$  über die Kanten hinaus mit  $a', b', c', d'$ , ferner die Halbierungsebene des Winkels der Seiten  $a$  und  $b$  mit  $(ab)$ , demnach die Halbierungsebene seines Nebenwinkels mit  $(a'b)$  oder  $(ab')$ , so enthält die folgende Zusammenstellung in jeder wagerechten Reihe drei Ebenen, welche sich in derselben Geraden, und jede Gruppe von vier unter einander stehenden wagerechten Reihen vier Geraden, welche sich in demselben Punkte schneiden. Solcher Punkte giebt es acht. Der erste liegt innerhalb des Tetraeders und ist der im Satze 262 erwähnte; die folgenden vier (2—5) liegen in den vier Räumen, welche mit dem Tetraeder eine Seite gemeinsam haben, und zwar erhält man dieselben aus (2) durch cirkuläre Vertauschung aller vier Buchstaben. Die letzten drei (6—8) liegen in drei von den Räumen, welche mit dem Tetraeder eine Kante gemeinsam haben, und zwar erhält man dieselben aus (6) durch cirkuläre Vertauschung dreier Buchstaben (z. B.  $b, c, d$ ).

| (1)              | (2—5)              | (6—8)              |
|------------------|--------------------|--------------------|
| $(ab) (bc) (ca)$ | $(ab) (bc) (ca)$   | $(ac) (c'b) (b'a)$ |
| $(bc) (cd) (db)$ | $(bc) (c'd) (d'b)$ | $(bd) (d'a) (a'b)$ |
| $(cd) (da) (ac)$ | $(c'd) (d'a) (ac)$ | $(ac) (c'd) (d'a)$ |
| $(da) (ab) (bd)$ | $(d'a) (ab) (b'd)$ | $(bd) (d'c) (c'b)$ |

Sätze über Ebenen, die durch einen Punkt gehen. Bestimmung einer Kugel durch vier in einer Ebene liegende Punkte. Spezieller Fall, wenn diese Punkte Ecken eines Sehnenvierecks sind.

**83. Kugel und Polyeder.** — Liegen die Ecken eines Polyeders auf einer Kugelfläche, so sagt man, das Polyeder sei der Kugel einbeschrieben, und die Kugel dem Polyeder umbeschrieben. Die Ecken des Polyeders sind vom Mittelpunkte der Kugel gleichweit entfernt. — In eine gegebene Kugel wird ein Polyeder beschrieben, indem man auf der Kugelfläche Punkte annimmt, und durch je drei benachbarte derselben eine Ebene legt (so dass auf der abgeschnittenen kleineren Kugelkappe keiner der gegebenen Punkte liegt. Doch können in derselben Ebene mehr als drei der gegebenen Punkte liegen). Damit um ein gegebenes Polyeder eine Kugel beschrieben werden könne, muss ein Punkt existieren, der von den Eckpunkten des Polyeders gleichweit entfernt ist,



Sind die Seitenflächen eines Polyeders Tangentenebenen einer Kugelfläche, so sagt man, das Polyeder sei der Kugel umbeschrieben. Die Kugel heisst dem Polyeder eingeschrieben, wenn sie innerhalb des Polyeders liegt, anbeschrieben, wenn ausserhalb. Beide Kugeln heissen zusammen Berührungskugeln. Die Seitenflächen des Polyeders sind vom Mittelpunkte einer solchen Kugel gleichweit entfernt. — Um eine gegebene Kugel wird ein Polyeder beschrieben, indem man in Punkten der Kugelfläche Tangentenebenen legt. Damit in oder an ein gegebenes Polyeder eine Kugel beschrieben werden könne, muss ein Punkt existieren, der von den Seitenflächen des Polyeders gleichweit entfernt ist.

84. Tetraeder. — Nach 261, 257 und 251 giebt es für jedes Tetraeder einen Punkt, der von seinen Eckpunkten, und nach 262 (nebst Anm.), 258 und 259, 255 acht Punkte (die Schnittpunkte dreier Ebenenpaare), die von seinen Seiten gleichweit entfernt sind. Man kann daher sagen:

263. Jedes Tetraeder hat eine umbeschriebene und acht Berührungskugeln.

Anm. Die Lage dieser Kugeln geht aus Anm. zu 262 hervor. Zu beachten ist, dass nur in drei von den sechs Räumen, welche an die Kanten des Tetraeders grenzen, Berührungskugeln existieren.

85. Homogene Polyeder. — Ein Polyeder heisst homogen, wenn alle seine Seitenflächen dieselbe Seitenzahl ( $n$ ), und alle seine Ecken dieselbe Seitenzahl ( $p$ ) haben.

Sei  $m$  die Zahl der Seitenflächen eines homogenen Polyeders, so würde, da jede Seitenfläche  $n$  Eckpunkte hat, die Zahl aller Eckpunkte  $mn$  sein. Da aber jeder Eckpunkt zu  $p$  Seitenflächen gehört, so fallen jedesmal  $p$  von jenen  $mn$  Eckpunkten in einen zusammen; mithin beträgt die Zahl der Eckpunkte des Polyeders nur  $\frac{mn}{p}$ .

Da ferner jede der  $m$  Seitenflächen  $n$  Kanten hat, so würde die Zahl aller Kanten  $mn$  sein. Da aber jede Kante zu 2 Seitenflächen gehört, so fallen jedesmal 2 von jenen  $mn$  Kanten in eine zusammen; mithin beträgt die Zahl der Kanten des Polyeders nur  $\frac{mn}{2}$ .

Bezeichnet man nun die Zahl der Eckpunkte, Seiten und Kanten eines homogenen Polyeders (wie in Satz 134) bezw. durch  $e$ ,  $s$  und  $k$ , so ist



$$e = \frac{mn}{p}; \quad s = m; \quad k = \frac{mn}{2},$$

folglich nach 134:

$$\frac{mn}{p} + m = \frac{mn}{2} + 2,$$

woraus folgt:

$$m = \frac{4p}{2n - (n-2)p};$$

d. h.: In einem homogenen Polyeder, welches  $p$ -seitige 264. Ecken, und  $n$ -seitige Flächen enthält, ist die Zahl aller Flächen  $\frac{4p}{2n - (n-2)p}$ .

Wir untersuchen nun die einzelnen Fälle des homogenen Polyeders, wobei zu beachten ist, dass  $p$  niemals kleiner als 3 sein kann.

Erster Fall:  $n = 3$ . Das Polyeder ist von lauter Dreiecken begrenzt. — Aus Formel 264 folgt:  $m = \frac{4p}{6-p}$ .

Wenn  $p = 3, 4, 5$ ,  
so ist  $m = 4, 8, 20$ .

Da, wenn  $p = 6$  ist,  $m$  den Wert  $\infty$  hat, so giebt es hiernach nur drei Arten homogener Polyeder, die von Dreiecken begrenzt sind, nämlich mit vier Flächen (Tetraeder), mit acht Flächen (Oktaeder), und mit zwanzig Flächen (Ikosaeder).

Zweiter Fall:  $n = 4$ . Das Polyeder ist von lauter Vierecken begrenzt. — Aus Formel 264 folgt:  $m = \frac{4p}{8-2p} = \frac{2p}{4-p}$ .

Wenn  $p = 3$ ,  
so ist  $m = 6$ .

Andre Fälle sind offenbar nicht möglich. Es giebt hiernach nur eine Art homogener Polyeder, die von Vierecken begrenzt ist, nämlich mit sechs Flächen (Hexaeder).

Dritter Fall:  $n = 5$ . Das Polyeder ist von lauter Fünfecken begrenzt. — Aus Formel 264 folgt:  $m = \frac{4p}{10-3p}$ .

Wenn  $p = 3$ ,  
so ist  $m = 12$ .



Andre Fälle sind offenbar nicht möglich. Es giebt hiernach nur eine Art homogener Polyeder, die von Fünfecken begrenzt ist, nämlich mit zwölf Flächen (Dodekaeder).

Für  $n = 6$  erhält man  $m = \frac{4p}{12 - 4p} = \frac{p}{3 - p}$ . In diesem Falle (und ebenso, wenn  $n$  noch grössere Werte hat) erhält man also keinen ganzen positiven Wert mehr für  $m$ . Man hat also den Satz:

265. Es giebt nur fünf Arten homogener Polyeder, nämlich das Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Hexaeder und Dodekaeder.

Die Zahl aller Eckpunkte, Seiten und Kanten beträgt im

|            | Ecken | Seiten | Kanten |
|------------|-------|--------|--------|
| Tetraeder  | 4     | 4      | 6      |
| Hexaeder   | 8     | 6      | 12     |
| Oktaeder   | 6     | 8      | 12     |
| Dodekaeder | 20    | 12     | 30     |
| Ikosaeder  | 12    | 20     | 30     |

Anm. Inwiefern entspricht hiernach das Dodekaeder dem Ikosaeder, das Hexaeder dem Oktaeder, das Tetraeder sich selbst?

266. Verbindet man einen Punkt im Innern eines homogenen Polyeders mit seinen sämtlichen Eckpunkten, so teilen die entstehenden Dreiecksflächen das Polyeder in  $m$   $n$ -seitige Pyramiden.

86. *Teilung der Kugelfläche in regelmässige Polygone.* — Die Fläche einer Kugel kann durch drei Systeme von Diametralkreisen in kongruente regelmässige Kugelpolygone zerlegt werden. \*)

Erstes System. Zwei Diametralkreise schneiden sich in zwei Punkten  $P$  und  $P_1$  unter Winkeln von  $\left(\frac{360^\circ}{2 \cdot 2} =\right) 90^\circ$ . — Teilt man zwei benachbarte der vier von  $P$  ausgehenden Halbkreise ( $\widehat{PP_1}$ ) in zwei gleiche Teile (so dass  $\widehat{PA} = \widehat{AP_1}$  und

\*) Zur Anfertigung von Modellen für diese Diametralkreise sind Gummibälle (von 5—6 cm Durchmesser) besonders brauchbar.



$\widehat{PB} = \widehat{BP}_1$ ), und legt den Diametralkreis durch das Punktepaar  $AB$ , so teilen diese drei Diametralkreise die Kugel­fläche in acht kongruente regelmässige Kugeldreiecke (wie  $\overline{PAB}$ ). (97)

Anm. Wie heissen diese Kugeldreiecke, wenn die Gegenpunkte von  $P, A, B$  bzw. mit  $P_1, A_1, B_1$  bezeichnet werden?

Zweites System. Drei Diametralkreise schneiden sich in zwei Punkten  $P$  und  $P_1$  unter Winkeln von  $\left(\frac{360^\circ}{3 \cdot 2} =\right) 60^\circ$ . —

Teilt man drei nicht benachbarte der sechs von  $P$  ausgehenden Halbkreise

( $\widehat{PP}_1$ ) so, dass die grösseren Abschnitte ( $PA, PB, PC$ ) gleich der Seite, und die kleineren ( $AP_1, BP_1, CP_1$ ) gleich  $\frac{2}{3}$  der Höhe eines regelmässigen Kugeldreiecks sind, (Fig. 45) und legt noch drei Diametralkreise durch die Punktepaare  $AB, BC, CA$ , so teilen diese sechs Diametralkreise die Kugel­fläche in vier kon-

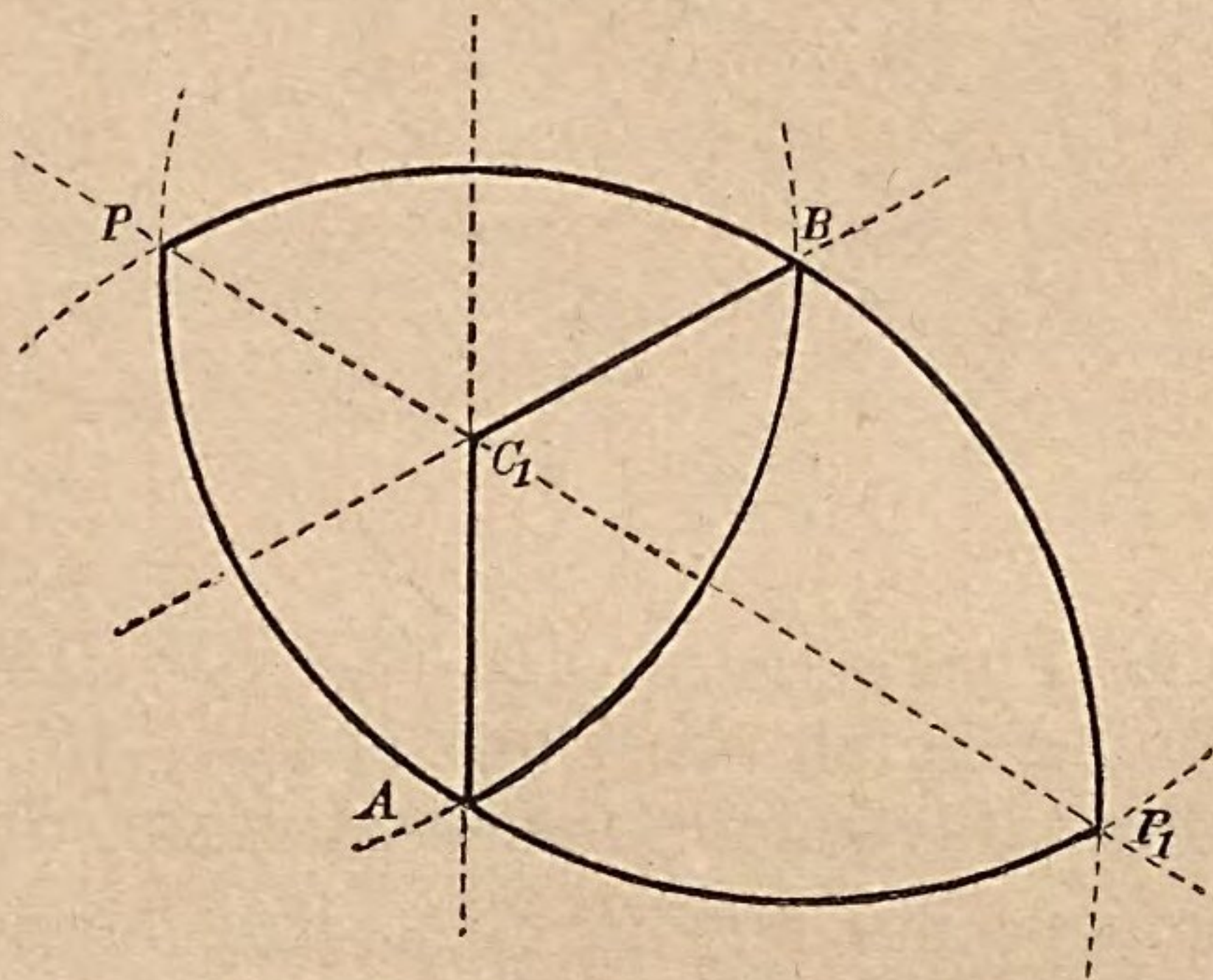
gruente regelmässige Kugeldreiecke (wie  $PAB$ ).\*)

Anm. Diese vier Dreiecke sind  $\overline{PAB}, \overline{PBC}, \overline{PCA}, \overline{ABC}$ . Die sechs Diametralkreise bilden gleichzeitig die Mittellinien der vier Dreiecke, und zwar ist der Mittelpunkt jedes Dreiecks der Gegenpunkt desjenigen der vier Punkte  $P, A, B, C$ , welcher nicht Eckpunkt des Dreiecks ist. Es ist ferner  $PA_1 = PB_1 = PC_1 = P_1A = P_1B = P_1C$ , und  $PA = PB = PC = P_1A_1 = P_1B_1 = P_1C_1$ . Jedes der vier Dreiecke besteht aus sechs Kugeldreiecken, deren gemeinsame Ecken die Punkte  $A_1, B_1, C_1, P_1$  sind.

Dieselben sechs Diametralkreise teilen die Kugel­fläche ausserdem in sechs kongruente regelmässige Kugelvierecke (wie  $\overline{C_1AP_1B}$ ).

Anm. Diese sechs Vierecke sind  $\overline{C_1AP_1B}, \overline{CA_1PB_1}; \overline{CA_1P_1B}, \overline{C_1APB_1}; \overline{CAP_1B_1}, \overline{C_1A_1PB}$ . Die sechs Diametralkreise bilden gleichzeitig die Diagonalen der sechs Vierecke, und zwar sind die Mittelpunkte der Vierecke diejenigen Punkte, in denen nur zwei Diametralkreise sich schneiden. Jedes der sechs Vierecke besteht aus vier Kugeldreiecken, deren gemeinsame Ecken die Mittelpunkte der Kugelvierecke sind.

Fig. 45.

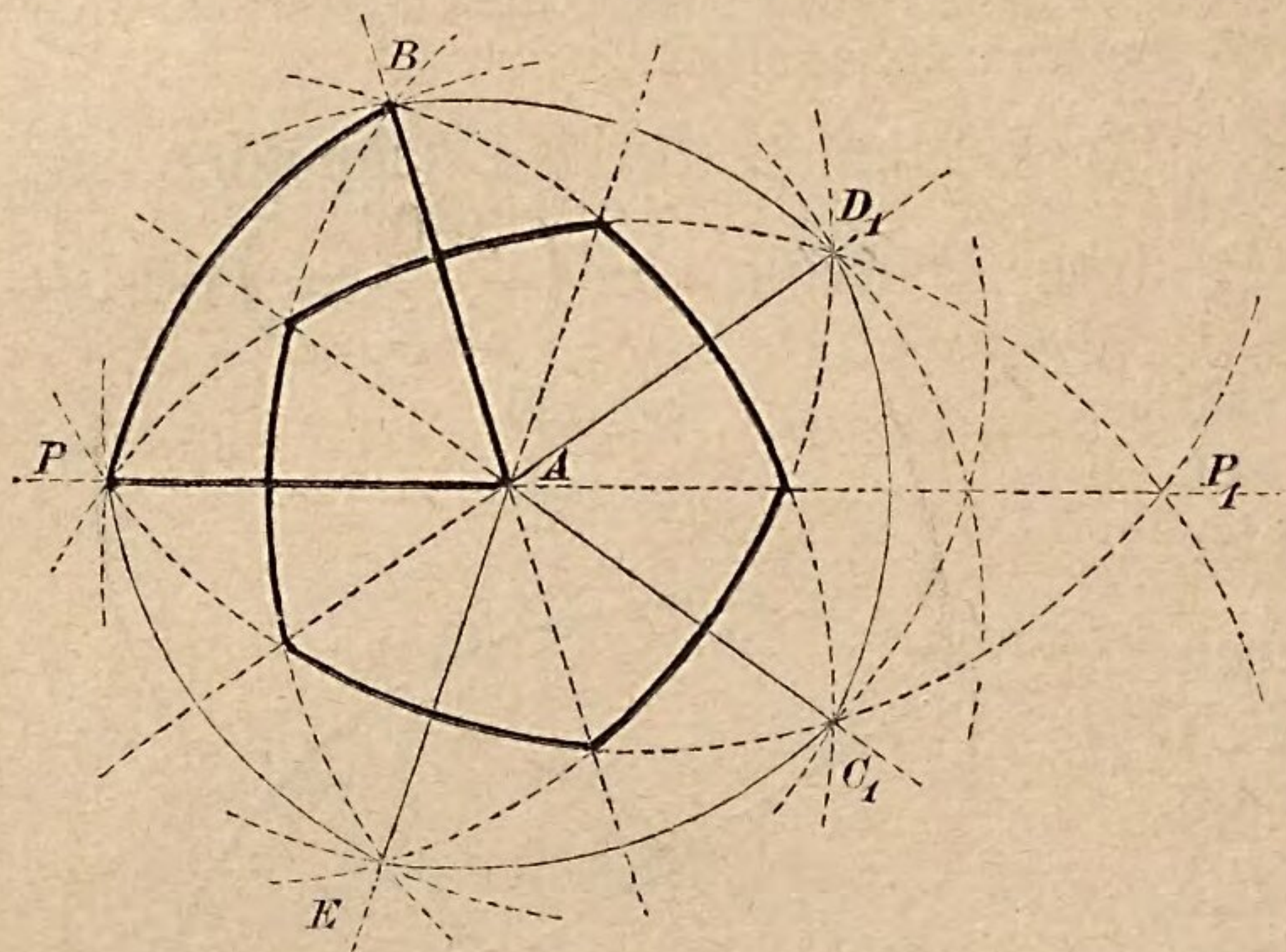


\*) Der Beweis für die Richtigkeit des Satzes ist am Modell zu führen.



Drittes System. Fünf Diametralkreise schneiden sich in zwei Punkten  $P$  und  $P_1$  unter Winkeln von  $\left(\frac{360^\circ}{5 \cdot 2} =\right) 36^\circ$ . —

Fig. 46.



Teilt man fünf nicht benachbarte der zehn von  $P$  ausgehenden

Halbkreise ( $\widehat{PP_1}$ ) so, dass die kleineren Abschnitte ( $PA, PB, \dots PE$ ) gleich der Seite, und die grösseren ( $AP_1, BP_1, \dots EP_1$ ) gleich der doppelten Höhe eines regelmässigen Kugeldreiecks sind (Fig. 46), und legt noch fünf

Diametralkreise durch die Punktepaare  $AB, BC, CD, DE, EA$ , und fünf Diametralkreise durch die Punktepaare  $AC, BD, CE, DA, EB$ , so teilen diese fünfzehn Diametralkreise die Kugeloberfläche in zwanzig kongruente regelmässige Kugeldreiecke (wie  $\overline{PAB}$ ).\*)

Anm. Diese zwanzig Dreiecke sind:

$\overline{PAB}, \overline{PBC}, \overline{PCD}, \overline{PDE}, \overline{PEA}; \overline{P_1A_1B_1}, \overline{P_1B_1C_1}, \overline{P_1C_1D_1}, \overline{P_1D_1E_1}, \overline{P_1E_1A_1};$   
 $\overline{ABD_1}, \overline{BCE_1}, \overline{CDA_1}, \overline{DEB_1}, \overline{EAC_1}; \overline{A_1B_1D}, \overline{B_1C_1E}, \overline{C_1D_1A}, \overline{D_1E_1B}, \overline{E_1A_1C}.$

Die fünfzehn Diametralkreise bilden gleichzeitig die Mittellinien der zwanzig Dreiecke, und zwar sind die Mittelpunkte der Dreiecke diejenigen Punkte, in denen drei Diametralkreise sich schneiden. Jedes der zwanzig Dreiecke besteht aus sechs Kugeldreiecken, deren gemeinsame Ecken die Mittelpunkte der ersteren Dreiecke sind.

Dieselben fünfzehn Diametralkreise teilen die Kugeloberfläche ausserdem in zwölf kongruente regelmässige Kugelfünfecke. Die Ecken eines jeden derselben sind die Mittelpunkte von fünf Kugeldreiecken der vorigen Art, die eine Ecke (z. B.  $A$ ) gemeinsam haben. Man kann demnach diese zwölf Kugelfünfecke durch ihre Mittelpunkte (z. B.  $\overline{A}$ ) bezeichnen.

Anm. Diese zwölf Fünfecke sind also:  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}, \overline{E}, \overline{P}; \overline{A_1}, \overline{B_1}, \overline{C_1}, \overline{D_1}, \overline{E_1}, \overline{P_1}$ . Die fünfzehn Diametralkreise bilden gleichzeitig die Mittellinien der zwölf Fünfecke, und zwar sind die Mittelpunkte der Fünfecke die Punkte, nach welchen die Fünfecke benannt sind. Jedes der zwölf Fünfecke besteht aus zehn Kugeldreiecken, deren gemeinsame Ecken die Mittelpunkte der Fünfecke sind.

\*) S. die Fussnote auf voriger Seite.

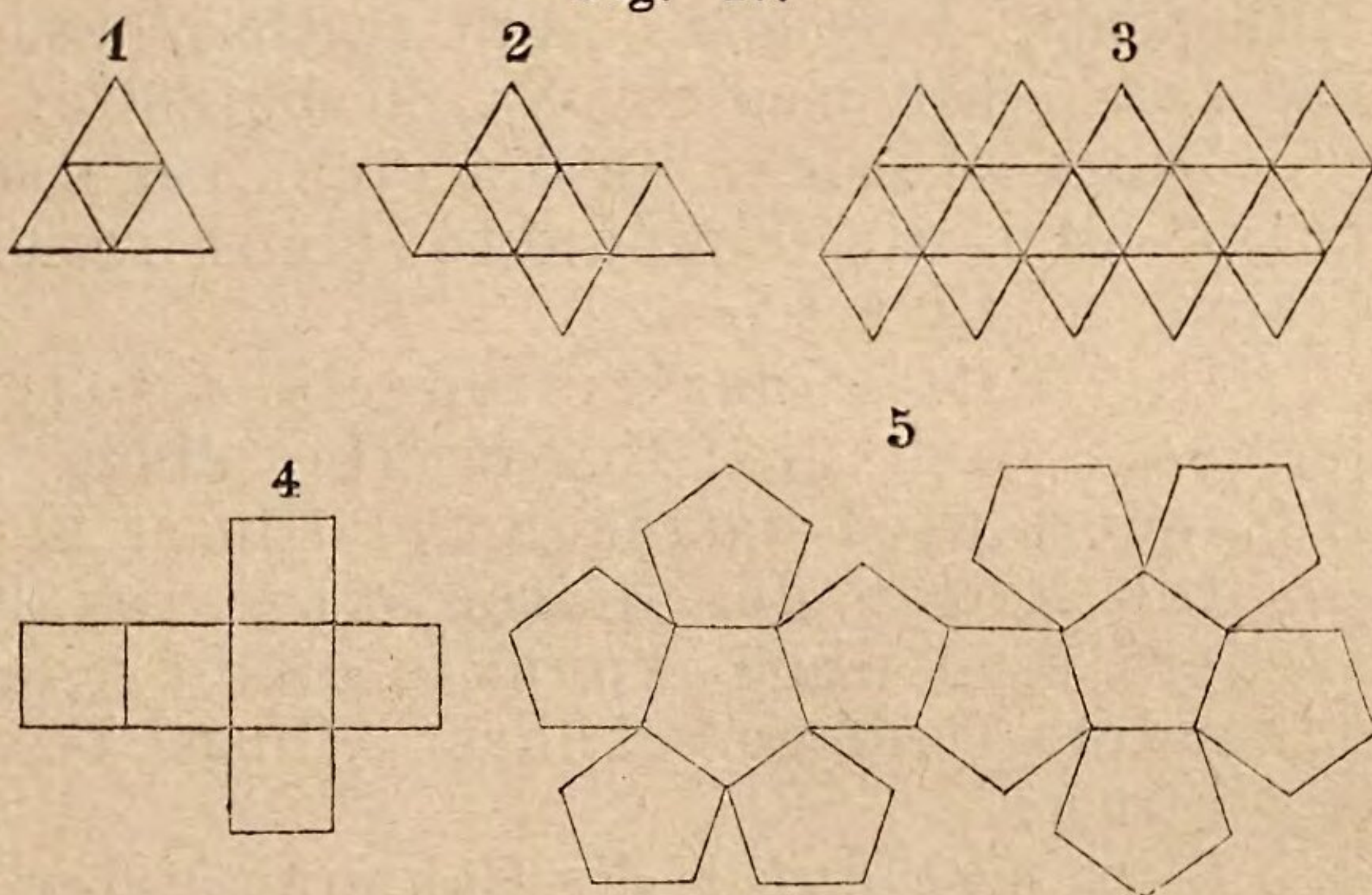


**87. Regelmässige Polyeder.** — Ein homogenes Polyeder heisst regelmässig, wenn alle seine Seiten kongruente regelmässige Polygone sind.

Teilt man die Fläche einer Kugel (auf eine der in 267. der vorigen Nr. beschriebenen Arten) in kongruente Kugelpolygone und konstruiert zu allen Seiten dieser Polygone die zugehörigen Sehnen, so sind diese Sehnen die Kanten eines Polyeders, welches von lauter kongruenten (regelmässigen, ebenen) Polygonen begrenzt und der Kugel einbeschrieben ist. (Nach T. II, 162 haben die

Fig. 47.

Dreiecke gleiche Seiten, die Vierecke gleiche Seiten und Diagonalen, während die Fünfecke gleiche Seiten haben und Grundflächen gerader Pyramiden sind. Hieraus folgt die Regelmässigkeit und Kongruenz aller dieser Polygone.



Dass die Vier- und Fünfecke ebene Figuren sind, folgt aus dem Satze, dass man in und um jedes regelmässige Kugelpolygon einen Kreis beschreiben kann.) Das Polyeder ist also ein regelmässiges. — Aus 265 folgt:

Es giebt nur fünf regelmässige Polyeder, nämlich 268. das regelmässige Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Hexaeder (Würfel) und Dodekaeder.\*)

Da die den Seitenflächen eines regelmässigen Polyeders umbeschriebenen Kreislinien kongruent sind, also (nach 236) gleichen Abstand vom Kugelmittelpunkte haben, so ist letzterer gleichzeitig Mittelpunkt einer dem Polyeder einbeschriebenen Kugel, und man hat den Satz:

\*) Fig. 47 enthält die Netze dieser Körper, und die am Ende des Buches befindlichen Tafeln ihre stereoskopischen Bilder. Letztere können auch ohne Stereoskop in einer Entfernung von 20 cm betrachtet werden, wobei längs des trennenden Striches senkrecht zur Ebene des Bildes ein Blatt Papier (oder auch nur die Hand) zu halten ist.



269. In jedes regelmässige Polyeder kann eine Kugel beschrieben werden.

Hiernach liegen die Mittelpunkte der Seitenflächen eines regelmässigen Polyeders auf einer Kugelfläche. Man erhält diese Mittelpunkte, wenn man die Mitten der Seitenflächen der regelmässigen Kugelpolygone, welche eine Kugelfläche bedecken, mit dem Kugelmittelpunkte verbindet. Diese Linien schneiden die dem zugehörigen regelmässigen Polyeder einbeschriebene Kugelfläche in den verlangten Punkten. Da diese Mittelpunkte auf der inneren Kugelfläche ebenso gleichmässig verteilt liegen, wie die Eckpunkte auf der äusseren, so folgt, dass auch jene Mittelpunkte Eckpunkte eines regelmässigen Polyeders sind, und zwar erhält man aus Nr. 86 die Sätze:

270. Die Mitten der Seiten eines regelmässigen Tetraeders sind die Eckpunkte eines regelmässigen Tetraeders. (Hugel I, 6. \*)

Die Mitten der Seiten eines regelmässigen Oktaeders sind die Eckpunkte eines regelmässigen Hexaeders (und umgekehrt). (Hugel II, 8; III, 8.)

Die Mitten der Seiten eines regelmässigen Ikosaeders sind die Eckpunkte eines regelmässigen Dodekaeders (und umgekehrt). (Hugel IV, 7; V, 8.)

Ferner:

271. Legt man durch die Eckpunkte der regelmässigen Kugelpolygone, welche eine Kugelfläche bedecken, Tangentenebenen, so entsteht ein der Kugel umschriebenes regelmässiges Polyeder.

Da, wie sich leicht zeigen lässt, die Eckpunkte dieses Polyeders gleichen Abstand vom Mittelpunkte der einbeschriebenen Kugel haben, so hat man schliesslich den Satz:

272. Um jedes regelmässige Polyeder kann eine Kugel beschrieben werden.

Auch die Mitten der Kanten eines regelmässigen Polyeders haben gleichen Abstand vom Kugelmittelpunkte, liegen also auf einer dritten Kugelfläche, welche die Seiten des Polyeders in ihren einbeschriebenen Kreisen schneidet.

Der Radius der einem regelmässigen Polyeder umschriebenen Kugel heisst grosser Radius, der der einbeschriebenen Kugel kleiner Radius, der Radius derjenigen Kugel-

---

\*) Die regulären und halbrekulären Polyeder, von Th. Hugel. Neustadt a. d. H. 1876. (Stereoskopische Bilder.)



fläche, welche durch die Mitten der Kanten geht, mittlerer Radius des Polyeders, der gemeinsame Mittelpunkt aller drei Kugeln Mittelpunkt des Polyeders.

Die Ebenen, welche durch je eine Kante und den 273. Mittelpunkt eines regelmässigen Polyeders von  $n$  Seiten gehen, teilen dasselbe in  $n$  kongruente regelmässige Pyramiden (*Bestimmungspyramiden*).

Anm. Welche anderen Teilungen des Polyeders lassen sich nach Analogie von T. II, 212 ausführen? — Was ist über analoge Sätze zu T. II, 214, 216—19 zu bemerken? — Welche Beziehungen bestehen zwischen den Radien der drei zu einem regelmässigen Polyeder gehörigen Kugeln?

Aus dem regelmässigen Ikosaeder und Dodekaeder entstehen durch Verlängerung der Kanten (oder Erweiterung der Ebenen) die regelmässigen Sternpolyeder, welche auf den am Schluss des Buches befindlichen Tafeln in stereoskopischen Bildern (Nr. 6—10) dargestellt sind, nämlich:

1) Das konkave Stern-Ikosaeder (Nr. 6) durch beiderseitige Verlängerung aller Kanten des Ikosaeders. Ueber jeder Fläche des letzteren erhebt sich eine regelmässige dreiseitige Pyramide. Der Körper hat 20 Eckpunkte und 60 Flächen (je drei in einem Eckpunkte sich schneidend), von denen je fünf in einer Ebene liegen.

2) Das konvexe Stern-Dodekaeder (Nr. 7) entsteht aus dem vorigen Körper, wenn jeder Eckpunkt des letzteren mit den drei benachbarten Eckpunkten verbunden wird. Diese Strecken bilden zusammen die Kanten eines regelmässigen Dodekaeders. Je fünf derselben, die in einer Ebene liegen, bilden mit einer Ecke des Ikosaeders als Spitze eine regelmässige fünfseitige Pyramide. Aus dem Dodekaeder ist unter jeder seiner Seiten eine solche Pyramide ausgeschnitten. Der Körper hat 20 Eckpunkte und 60 Flächen (je sechs in einem Eckpunkte sich schneidend), von denen je drei in einer Ebene liegen.

3) Das konkave Stern-Dodekaeder (Nr. 8) entsteht aus dem Dodekaeder ebenso wie 1) aus dem Ikosaeder. Ueber jeder Fläche des Dodekaeders erhebt sich eine regelmässige fünfseitige Pyramide. Der Körper hat 12 Eckpunkte und 60 Flächen (je fünf in einem Eckpunkte sich schneidend), von denen je fünf in einer Ebene liegen.

4) Das konvexe Stern-Ikosaeder (Nr. 9) entsteht aus dem vorigen Körper, wenn jeder Eckpunkt des letzteren mit den fünf benachbarten Eckpunkten verbunden wird. Diese



Strecken bilden zusammen die Kanten eines regelmässigen Ikosaeders. Je drei derselben, die in einer Ebene liegen, bilden mit einer Ecke des Dodekaeders als Spitze eine regelmässige dreiseitige Pyramide. Aus dem Ikosaeder ist unter jeder seiner Seiten eine solche Pyramide ausgeschnitten. Der Körper hat 12 Eckpunkte und 60 Flächen (je zehn in einem Eckpunkte sich schneidend), von denen je fünf in einer Ebene liegen.

5) Das konkav-konvexe Stern-Dodekaeder entsteht aus 3), indem unter jeder Seite dieses Körpers nochmals eine dreiseitige Pyramide ausgeschnitten wird. Der Körper hat demnach 180 Flächen (je zehn in einem Eckpunkte sich schneidend), von denen je 9 in einer Ebene liegen.

Das konkav-konvexe Stern-Ikosaeder würde aus 1) ebenso entstehen, wie 5) aus 3). Indessen müsste unter jeder Seite von 1) dieselbe dreiseitige Pyramide ausgeschnitten werden, welcher diese Seite angehört. Es würde also nichts Körperliches übrig bleiben; der Körper existiert daher als solcher nicht; seine Kanten aber fallen mit denen von 1) zusammen.

88. Zwei Kugelflächen. — Wenn zwei in einer Ebene liegende Kreislinien sich um ihre Centrallinie drehen, so entstehen zwei Kugelflächen. Die Centrallinie der ersteren, welche auch die beiden Kugelmittelpunkte verbindet, heisst auch Centrallinie der Kugeln. Aus den verschiedenen Beziehungen der beiden Kreislinien (s. T. II, Nr. 104) gehen ebenso viele Beziehungen der beiden Kugelflächen hervor. Im allgemeinen haben zwei Kugelflächen eine gemeinsame Kreislinie (wie sogleich gezeigt werden wird), die sich jedoch in einen Punkt zusammenziehen, oder ganz verschwinden kann.

Eine gemeinsame Kreislinie. — Wenn zwei sich schneidende Kreislinien eine halbe Umdrehung um ihre Centrallinie machen, so beschreibt ihre gemeinsame Sekante eine Ebene (42), und ihre beiden Schnittpunkte zusammen eine Kreislinie. Diese ist also auch den beiden Kugelflächen gemeinsam. — Aus T. II, 229 folgt nun:

274. Die Centrallinie zweier sich schneidender Kugelflächen ist kleiner als die Summe und grösser als die Differenz der Radien (und umgekehrt).

Ferner aus T. II, 230:

275. Die Centrallinie zweier sich schneidender Kugelflächen steht senkrecht auf der gemeinsamen Sekanten-



ebene und geht durch den Mittelpunkt der gemeinsamen Kreislinie.

Ein gemeinsamer Punkt. — Wenn zwei sich (von aussen oder innen) berührende Kreislinien eine halbe Umdrehung um ihre Centrallinie machen, so ändert der Berührungspunkt (T. II, 233) seine Lage nicht. Es haben dann auch die beiden Kugelflächen nur diesen einen Punkt gemeinsam. — Aus T. II, 231 und 232 folgt nun:

Die Centrallinie zweier sich von aussen (innen) 276. berührender Kugelflächen ist gleich der Summe (Differenz) der Radien (und umgekehrt).

Ferner aus T. II, 233:

Die Centrallinie zweier sich berührender Kugel- 277. flächen steht senkrecht auf der gemeinsamen Tangentenebene und geht durch den Berührungspunkt.

Kein gemeinsamer Punkt. — Wenn zwei ausser oder in einander liegende Kreislinien eine halbe Umdrehung um ihre Centrallinie machen, so entstehen zwei ausser oder in einander liegende Kugelflächen, welche keinen Punkt gemeinsam haben. Aus T. II, 234 und 235 folgt dann:

Die Centrallinie zweier ausser (in) einander lie- 278. gender Kugelflächen ist grösser als die Summe (kleiner als die Differenz) der Radien.

Ist insbesondere die Centrallinie gleich Null, so haben die beiden Kugeln denselben Mittelpunkt und heissen konzentrisch.

89. Sätze über den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugel. — 6) (Fortsetzung zu 256.) Durch analoge Betrachtungen wie in T. II, Nr. 106 erhält man leicht die Sätze:

Soll eine Kugelfläche *eine gegebene Kugelfläche in einem* 279. *gegebenen Punkte berühren*, so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die durch den Punkt und den Mittelpunkt gehende Gerade.

7) Soll eine Kugelfläche *mit gegebenem Radius eine* 280. *gegebene Kugelfläche berühren*, so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die mit der Summe oder Differenz der beiden Radien aus dem gegebenen Mittelpunkte beschriebene Kugelfläche.

Anm. Die in T. II, Nr. 107—140 behandelten projektivischen Beziehungen lassen sich auch auf räumliche Gebilde ausdehnen. Es kann indes dieser Gegenstand hier nur angedeutet werden. Im übrigen giebt die Art und Weise, wie in der Stereometrie der bewegten Gebilde Beziehungen der ebenen Geometrie auf räumliche Gebilde ausgedehnt worden sind, genügenden Anhalt zur Ausfüllung dieser Lücke.



## Rechnende Stereometrie.

**90. Vorbemerkung.** — Wie der Umfang eines Polygons als Summe seiner Seiten, so kann auch die Oberfläche eines Polyeders als Summe seiner Seiten dargestellt und berechnet werden. Es werden daher im folgenden nur die Mantelflächen des Cylinders, des Kegels und der Kugel eine besondere Berechnung erfordern. Dagegen ist der räumliche Inhalt (Körperraum, Volumen) eines Körpers ebenso zum Gegenstande einer neuen Betrachtung zu machen, wie in der Geometrie der Flächenraum einer Figur. Wie der letztere als Produkt zweier Strecken, so wird der erstere als Produkt dreier Strecken erscheinen. Im übrigen gelten die in T. II, Nr. 141 gemachten Bemerkungen auch hier.

### 1) Der Körperraum als Streckenprodukt.

**91. Masseinheit.** — Wie zwei ebene Figuren, so kann man auch zwei Körper (Körperräume) durch einander messen, indem man bestimmt, wie oft der eine in dem anderen enthalten ist. An dem Körper, welchen man als Mass benutzen will, ist Grösse und Gestalt beliebig. Es ist jedoch allgemein üblich, den Würfel als Massfigur zu nehmen, dessen Seiten als Quadrate das Flächenmass darstellen.

Nur ein Körper, die rechteckige Säule, lässt sich direkt durch den Würfel messen, d. h. in Würfel zerlegen; die Messung der übrigen Körper wird durch Rechnung bewerkstelligt.

**92. Die rechteckige Säule.** — Es sei  $m$  das gemeinsame Mass dreier anstossender Kanten ( $a, b, c$ ) einer rechteckigen Säule, und  $p$ -mal in  $a$ ,  $q$ -mal in  $b$ ,  $r$ -mal in  $c$  enthalten, so dass

$$a = pm, \quad b = qm, \quad c = rm$$

ist. Teilt man dann  $a$  in  $p$ ,  $b$  in  $q$ ,  $c$  in  $r$  gleiche Teile, und legt durch die Teilpunkte jeder Kante parallele Ebenen zur



Ebene der beiden andern Kanten, so zerfällt die rechteckige Säule in kongruente Würfel ( $M$ ). — Setzt man  $m = 1$ , so geben die Zahlen  $p, q, r$  die Länge der Kanten  $a, b, c$  an, und jeder der erhaltenen Würfel hat die Längeneinheit als Kante. Setzt man auch  $M = 1$ , so ist das Volumen der rechteckigen Säule durch die Zahl ausgedrückt, welche angiebt, in wieviel Würfel die rechteckige Säule zerfällt.

Es kommt jetzt darauf an, diese Zahl zu bestimmen. Dazu bieten sich der Reihe nach drei Methoden.

- 1) Man zählt alle Würfel einzeln.
- 2) Da alle Würfel in  $r$  wagerechten Schichten stehen, deren jede  $pq$  Würfel enthält, so genügt es, die Würfel längs dreier anstossender Kanten zu zählen, und die erhaltenen Zahlen mit einander zu multiplizieren.
- 3) Da jede dieser drei Reihen Würfel soviel Würfel enthält, wie die entsprechende Kante Längeneinheiten, so genügt es, statt der Würfel die Längeneinheiten der Kanten  $a, b$  und  $c$  zu zählen ( $a, b$  und  $c$  durch  $m$  zu messen), und die erhaltenen Zahlen mit einander zu multiplizieren.

Die Anzahl der Würfel ist nach jeder dieser Zählungen  $pqr$ .

Anm. Zur wirklichen Ausmessung einer solchen rechteckigen Säule (z. B. eines Zimmers) durch eine der beiden ersten Methoden würde man ein wirkliches Körpermass (etwa einen hölzernen Würfel) gebrauchen. Die dritte Methode erfordert nur ein Längenmass zur Messung der Strecken  $a, b$  und  $c$ , und zeigt, wie die Körpermessung durch Längenmessungen und eine Rechnung ersetzt werden kann.

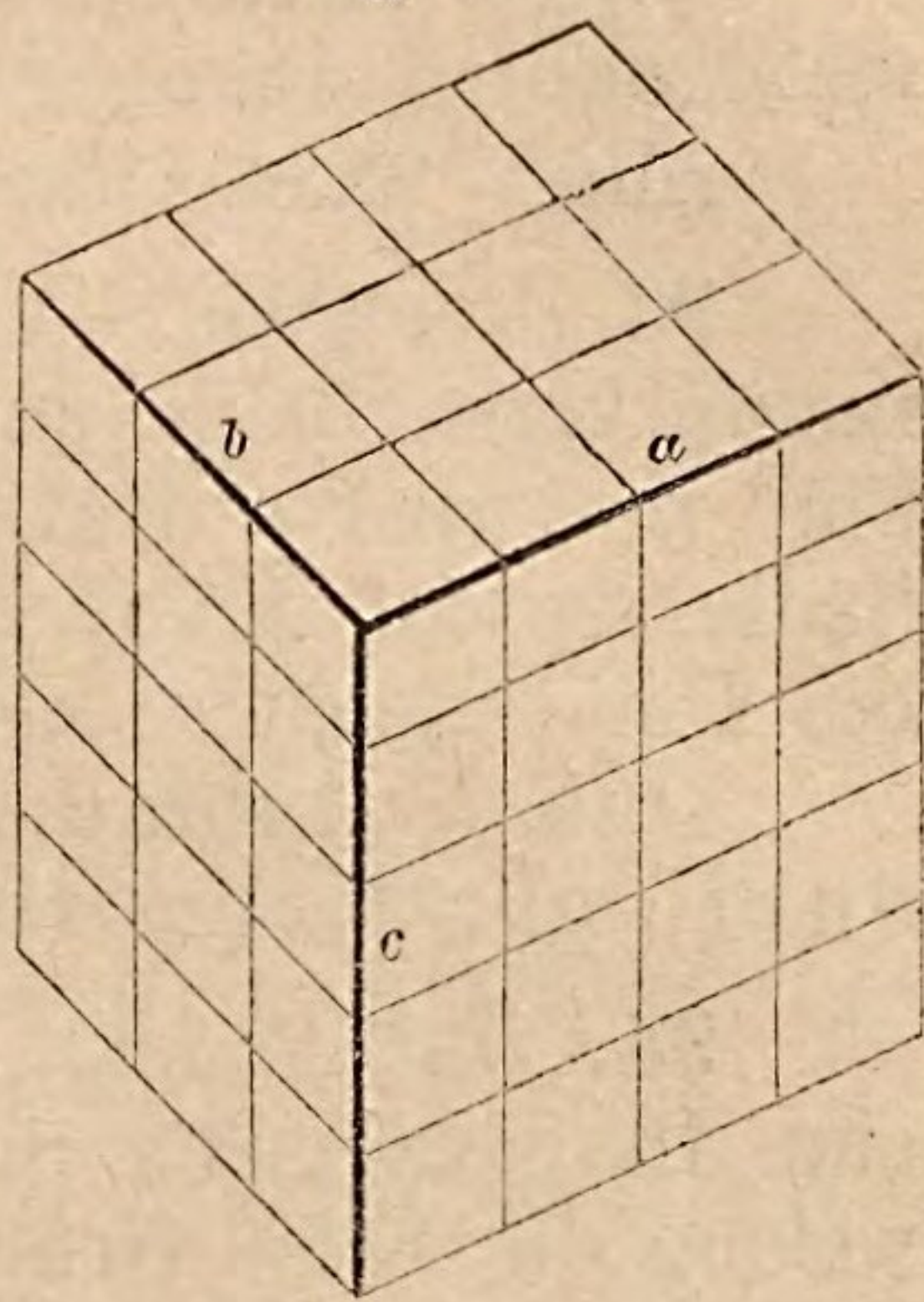
Man versteht nun unter dem *Produkte dreier Strecken*, die durch eine Längeneinheit gemessen sind, das mit dem Produkte ihrer Masszahlen multiplizierte Volumen des Würfels, dessen Seite die Längeneinheit ist.

Aus dieser Erklärung und der vorher gegebenen Bestimmung des Volumens der rechteckigen Säule folgt unmittelbar der Satz:

Das Volumen einer rechteckigen Säule ist gleich 281. dem Produkte dreier anstossender Kanten.

Sind die drei Strecken eines solchen Produktes einander gleich, so geht das Produkt in die arithmetische dritte Potenz der einen Strecke über, und aus 281 folgt:

Fig. 48.





282. Das Volumen eines Würfels ist gleich der (arithmetischen) dritten Potenz einer Kante.

Anm. Welcher Satz kann zwischen 281 u. 282 eingeschaltet werden?

**93. Die Säule.** — Eine beliebige Säule ist nach 206 einer rechteckigen Säule mit gleicher Grundfläche und Höhe gleich. Sind  $a$ ,  $b$  und  $c$  drei anstossende Kanten dieser rechteckigen Säule, so ist die Grundfläche der gegebenen Säule gleich  $ab$ , die Höhe gleich  $c$ ; also folgt aus 281:

283. Das Volumen einer Säule ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe.

**94. Das Prisma.** — Nach 211 zerfällt jede Säule durch eine Diagonalebene in zwei inhaltsgleiche dreiseitige Prismen, welche die halbe Grundfläche und die gleiche Höhe der Säule haben. Ist nun  $a$  die Grundfläche und  $h_1$  die Höhe der Säule, so ist ihr Volumen nach 283 gleich  $ah_1$ ; folglich das des dreiseitigen Prismas gleich  $\frac{ah_1}{2}$  oder  $\frac{a}{2} \cdot h_1$ . Da nun  $\frac{a}{2}$  die Grundfläche dieses Prismas ist, so folgt:

284. Das Volumen eines dreiseitigen Prismas ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe.

Nach 192 lässt sich jedes Prisma durch Diagonalebenen in dreiseitige Prismen von gleicher Höhe zerlegen. Ist  $a$  die Grundfläche des ganzen Prismas,  $a_1, a_2 \dots$  die Grundflächen seiner Teile, und  $h$  die gemeinsame Höhe aller Prismen, so sind die einzelnen Volumina nach 284:  $a_1h, a_2h, a_3h, \dots$ ; folglich das Gesamtvolumen

$$\mathfrak{V} = a_1h + a_2h + a_3h + \dots = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots)h,$$

oder, da  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = a$

ist,  $\mathfrak{V} = ah$ ;

285. d. h.: Das Volumen eines Prismas ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe.

**95. Die Pyramide.** — Aus 219 und 284 folgt:

286. Das Volumen einer dreiseitigen Pyramide ist gleich dem dritten Teile des Produkts aus Grundfläche und Höhe.

Nach 154 lässt sich jede Pyramide durch Schnittebenen in dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe zerlegen. Ist  $a$  die Grundfläche der ganzen Pyramide,  $a_1, a_2 \dots$  die Grundflächen ihrer Teile, und  $h$  die gemeinsame Höhe aller Pyramiden, so



sind die einzelnen Volumina nach 286:  $\frac{a_1 h}{3}$ ,  $\frac{a_2 h}{3}$ ,  $\frac{a_3 h}{3}$ , ...; folglich das Gesamtvolumen

$$\mathfrak{V} = \frac{a_1 h}{3} + \frac{a_2 h}{3} + \frac{a_3 h}{3} + \dots = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots) \frac{h}{3},$$

oder, da  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = a$

ist,  $\mathfrak{V} = \frac{a h}{3}$ ;

d. h.: Das Volumen einer Pyramide ist gleich dem 287. dritten Teile des Produktes aus Grundfläche und Höhe.

**96. Der Pyramidenstumpf.** — Ist von einer Pyramide, deren Grundfläche  $a$ , deren Höhe  $h + h_1$  ist, durch eine zu  $a$  parallele Ebene eine Pyramide abgeschnitten, deren Grundfläche  $a_1$ , Höhe  $h_1$  ist, so ist das Volumen des übrig bleibenden Pyramidenstumpfes (nach 287):

$$\mathfrak{V} = \frac{a(h + h_1)}{3} - \frac{a_1 h_1}{3} = \frac{a h}{3} + \frac{h_1(a - a_1)}{3}.$$

Nun ist

$$\frac{a}{a_1} = \frac{(h + h_1)^2}{h_1^2}, \text{ oder } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_1}} = \frac{h + h_1}{h_1},$$

oder: 
$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1}} = \frac{h}{h_1},$$

oder, beiderseits mit  $\sqrt{a} + \sqrt{a_1}$  multipliziert:

$$\frac{a - a_1}{\sqrt{a_1}} = \frac{h(\sqrt{a} + \sqrt{a_1})}{h_1}, \text{ oder } (a - a_1) h_1 = h(\sqrt{a a_1} + a_1);$$

also, wenn man diesen Wert oben einsetzt:

$$\mathfrak{V} = \frac{a h}{3} + \frac{h(\sqrt{a a_1} + a_1)}{3} = \frac{h}{3} (a + \sqrt{a a_1} + a_1);$$

d. h., da  $h$  die Höhe des Pyramidenstumpfes ist:

Das Volumen eines Pyramidenstumpfes ist gleich 288. dem dritten Teile des Produktes aus seiner Höhe und der Summe seiner Grundflächen und des geometrischen Mittels derselben.

Anm. Setzt man in der letzten Formel  $a_1 = a$ , so verwandelt sich der Pyramidenstumpf in ein Prisma, und die Formel für sein Volumen in  $\mathfrak{V} = a h$ , übereinstimmend mit 285.



**97. Polyeder.** — Sind  $a, b, c \dots$  die Seiten eines Polyeders, welches einer Kugel mit dem Radius  $\varrho$  umbeschrieben ist, so zerfällt dasselbe, wenn man durch den Mittelpunkt der Kugel und seine Kanten Ebenen legt, in Pyramiden, deren Grundflächen  $a, b, c \dots$  sind, deren Höhen alle gleich  $\varrho$  sind. Demnach ist das Volumen des Polyeders

$$\mathfrak{V} = \frac{a\varrho}{3} + \frac{b\varrho}{3} + \dots = \frac{\varrho(a + b + \dots)}{3},$$

oder, wenn  $\frac{a + b + \dots}{3} = p$  gesetzt wird:

$$\mathfrak{V} = p\varrho;$$

289. d. h.: Das Volumen eines der Kugel umbeschriebenen Polyeders ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus Oberfläche und Radius.

Anm. Andere Polyeder müssen, wenn ihr Volumen berechnet werden soll, in Pyramiden zerlegt werden. — Welche Sätze über die Vergleichung der Volumina zweier Körper lassen sich analog zu T. II, Nr. 148 und 149 aufstellen? — Führt eine geometrische oder stereometrische Aufgabe auf eine rein kubische Gleichung  $x^3 = abc + a_1b_1c_1$ , so kann man dieselbe durch die geometrische Konstruktion  $a_1b_1 = ay$  auf die Form  $x^3 = a(bc + yc_1)$ , und durch  $bc + yc_1 = z^2$  auf die Form  $x^3 = az^2$  bringen. Die in dieser Gleichung liegende Aufgabe: „Eine rechteckige Säule in einen Würfel zu verwandeln“ ist jedoch durch elementare Konstruktion nicht lösbar, folglich ebensowenig der specielle Fall obiger Gleichung  $x^3 = a^3 + b^3$ , welcher durch die Annahmen  $a = b = c$ ,  $a_1 = b_1 = c_1$  daraus hervorgeht (und der Fall  $x^3 = 2a^3$ , welcher das delische Problem genannt wird). Die gemischt-kubische Gleichung  $y^3 + 3p^2y = 2q^3$  (s. T. I, Nr. 109 und 110) würde die zur Konstruktion ungeeignete Lösung  $y = \sqrt[3]{q^3 + \sqrt{q^6 + p^6}} + \sqrt[3]{q^3 - \sqrt{q^6 + p^6}}$  ergeben.

## 2) Die regelmässigen Polygone.

**98. Flächenwinkel.** — Allgemeine Formel. — Von einem regelmässigen Polyeder sei eine Ecke  $A$  (Fig. 49) durch eine Ebene so abgeschnitten, dass auf den von  $A$  ausgehenden Kanten gleiche Stücke (z. B.  $AB, AC, AB_1$ ) abgeschnitten werden. Dann ist, wenn in der Ecke  $A$   $p$  Flächen zusammentreffen, der Eckpunkt  $A$  die Spitze einer geraden  $p$ -seitigen Pyramide. Der Fusspunkt  $A_1$  der Höhe dieser Pyramide ist (nach 145) der Mittelpunkt des der Grundfläche umbeschriebenen Kreises; und  $\overline{A_1BC}$  ein Bestimmungsdreieck des die Grundfläche bil-



denden regelmässigen  $p$ -Ecks. — Es ist ferner  $BAC (= \alpha)$  der Winkel eines der regelmässigen  $n$ -Ecke, welche das Polyeder begrenzen, und  $BA_1C (= \alpha_1)$  der Centriwinkel des regelmässigen  $p$ -Ecks.

Demnach

$$1) \quad \alpha = \frac{2n-4}{n} R; \quad \alpha_1 = \frac{4}{p} R.$$

Verbindet man  $D$ , die Mitte von  $BC$ , mit  $A$  und  $A_1$ , so zerfallen die gleichschenkligen Dreiecke  $\overline{ABC}$  und  $\overline{A_1BC}$  in rechtwinklige, und es ist

$$2) \quad CAD = \frac{\alpha}{2}; \quad CA_1D = \frac{\alpha_1}{2}.$$

Da endlich die Ebene  $\overline{ACA_1}$  den Winkel  $\varphi$  der beiden in  $AC$  sich schneidenden Seitenflächen der Pyramide  $\overline{ABC}$  und  $\overline{AB_1C}$  (die zugleich Flächen des Polyeders sind) halbiert, so ist, wenn man  $BO \perp AC$  und  $OO_1 \perp AC$  konstruiert,

$$3) \quad BOO_1 = \frac{\varphi}{2}.$$

Verbindet man nun  $B_1$  mit  $O$ , so ist  $\overline{BOC} \cong \overline{B_1OC}$ , also  $BO = B_1O$ , d. h.:  $OO_1 \perp BB_1$  (als Halbierungslinie des Winkels an der Spitze im gleichschenkligen Dreieck  $\overline{BOB_1}$ ).

Nun ist in dem rechtwinkligen Dreieck  $\overline{BOO_1}$

$$4) \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{BO_1}{BO}.$$

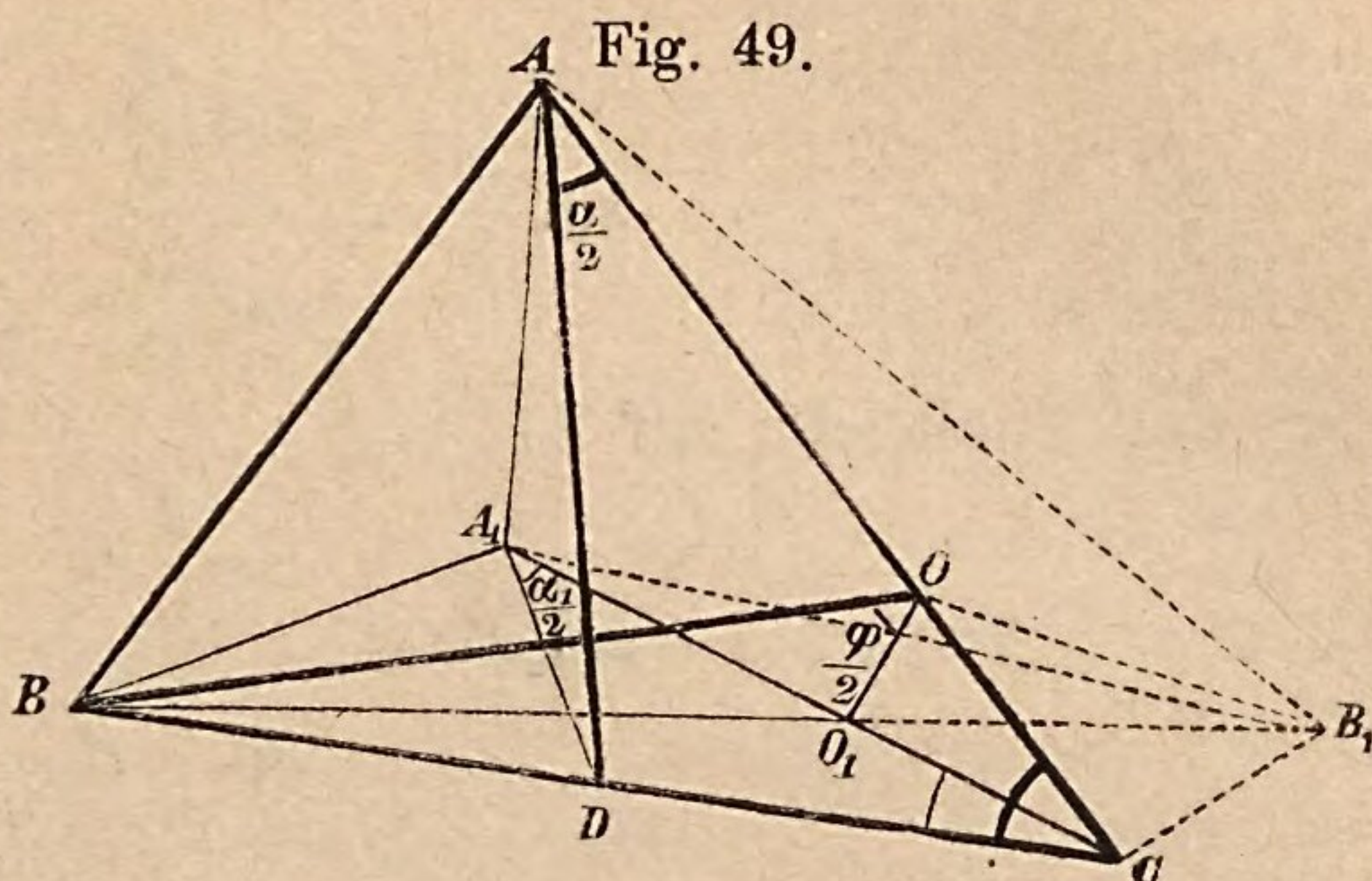
Ferner im rechtwinkligen Dreieck  $\overline{BO_1C}$ :

$$BO_1 = BC \cdot \sin BCA_1 = BC \cdot \cos DA_1C = BC \cdot \cos \frac{\alpha_1}{2},$$

und im rechtwinkligen Dreieck  $\overline{BOC}$ :

$$BO = BC \cdot \sin BCA = BC \cdot \cos DAC = BC \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Setzt man diese Werte in 4) ein, so folgt:





$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha_1}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

oder mit Rücksicht auf 1)

$$5) \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\cos \frac{2}{p} R}{\sin \frac{2}{n} R}.$$

Tetraeder. —  $n=3, p=3$ ;  $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ;  
 $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ; \*) also  $\frac{\varphi}{2} = 35^\circ 16'$ ;  $\varphi = 70^\circ 32'$ .

Anm. Durch einige Umformungen findet man aus 5)  $\cos \varphi = \frac{1}{3}$ , was auch direkt aus geometrischer Betrachtung folgt.

Oktaeder. —  $n=3, p=4$ ;  $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} : \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ;  
 $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{2}$ ; also  $\frac{\varphi}{2} = 54^\circ 44'$ ;  $\varphi = 109^\circ 28'$ .

Ikosaeder. —  $n=3, p=5$ ;  $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1+\sqrt{5}^{**})}{4} : \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$ ;  
 $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$ ; also  $\frac{\varphi}{2} = 69^\circ 5,7'$ ;  $\varphi = 138^\circ 11,4'$ .

Hexaeder. —  $n=4, p=3$ ;  $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 1$ ; also  $\frac{\varphi}{2} = 45^\circ$ ;  $\varphi = 90^\circ$ .

\*) Wird  $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{p}{q}$  gesetzt, so ist  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{p}{\sqrt{q^2 - p^2}}$  (T. III, S. 96).

\*\*) Aus T. III, 17 folgt  $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ;  $\sin^2 18^\circ = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$ ;  $\cos^2 18^\circ = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$ ;  $\cos 36^\circ = \cos^2 18^\circ - \sin^2 18^\circ$ .



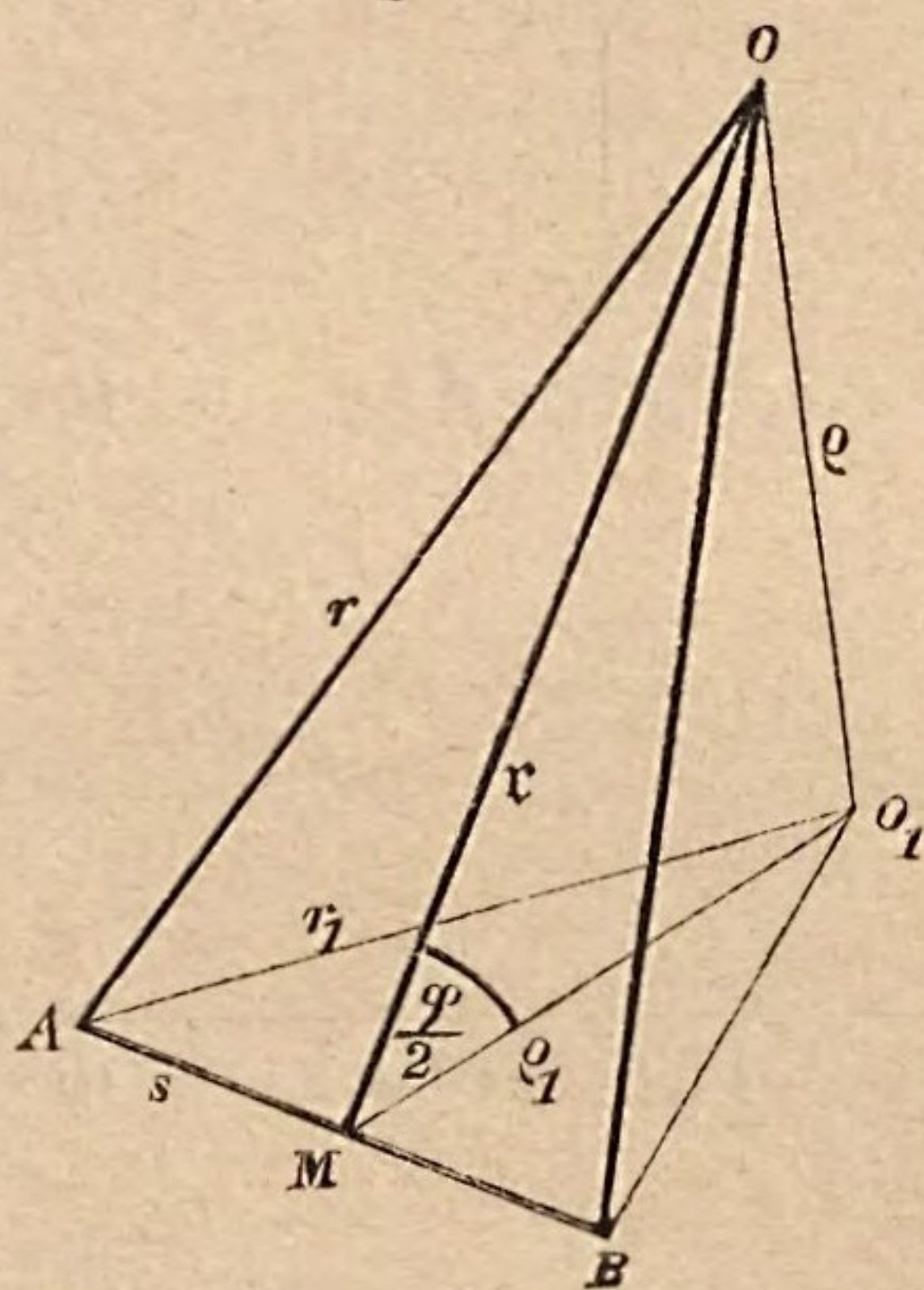
Dodekaeder. —  $n=5, p=3; \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} : \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} =$   
 $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}}; \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}}; \text{ also } \frac{\varphi}{2} = 58^\circ 17';$   
 $\varphi = 116^\circ 34'.$

Anm. Durch einige Umformungen findet man aus 5)  $\cos \varphi = -\frac{1}{5}\sqrt{5}.$

99. *Radien der zugehörigen Kugeln.* — Allgemeine Formeln. — Es sei in Fig. 50  $O$  die Spitze,  $OO_1$  die Höhe der Bestimmungspyramide eines regel-

Fig. 50.

mässigen Polyeders, und  $\overline{ABO_1}$  ein Bestimmungsdreieck der Grundfläche dieser Pyramide (der Seite des Polyeders). Dann sind  $OA=r, OM=r, OO_1=\varrho$  der Reihe nach die Radien der Kugeln, welche durch die Eckpunkte, Mitten der Kanten und Mitten der Seiten des Polyeders gehen; ferner  $O_1A=r_1$  und  $O_1M=\varrho_1$  die Radien der Kreise, welche der Seite des Polyeders um- und einbeschrieben sind; endlich ist  $AB=s$  eine Kante und  $OMO_1 = \frac{\varphi}{2}$  der halbe Flächenwinkel des Polyeders. Nun ist



$$r^2 = r_1^2 + \varrho^2; \varrho = \varrho_1 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}; \varrho_1^2 = r_1^2 - \frac{s^2}{4};$$

folglich durch Elimination von  $\varrho$  und  $\varrho_1$ :

$$1) \quad r^2 = r_1^2 + \left(r_1^2 - \frac{s^2}{4}\right) \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Ferner  $2) \quad \varrho^2 = \left(r_1^2 - \frac{s^2}{4}\right) \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} (= r^2 - r_1^2).$

Endlich  $r^2 = \varrho^2 + \varrho_1^2 = \left(r_1^2 - \frac{s^2}{4}\right) \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\right)$

oder  $3) \quad r^2 = \frac{r_1^2 - \frac{s^2}{4}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} \left(= \varrho^2 + r_1^2 - \frac{s^2}{4}\right).$



Für die von Dreiecken begrenzten Polyeder ist  
(T. III, Nr. 161)

$$s = r_1 \sqrt{3}; \quad r_1^2 = \frac{s^2}{3};$$

also:

$$1) \quad r^2 = \frac{s^2}{3} \left( 1 + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right); \quad 2) \quad \varrho^2 = r^2 - \frac{s^2}{3}; \quad 3) \quad r^2 = \varrho^2 + \frac{s^2}{12}.$$

$$\text{Tetraeder. — } \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}; \quad r^2 = \frac{3s^2}{8}; \quad r = \frac{s}{4} \sqrt{6};$$

$$\varrho^2 = \frac{s^2}{24}; \quad \varrho = \frac{s}{12} \sqrt{6};$$

$$r^2 = \frac{s^2}{8}; \quad r = \frac{s}{4} \sqrt{2}.$$

$$\text{Oktaeder. — } \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{2}; \quad r^2 = \frac{s^2}{2}; \quad r = \frac{s}{2} \sqrt{2};$$

$$\varrho^2 = \frac{s^2}{6}; \quad \varrho = \frac{s}{6} \sqrt{6};$$

$$r^2 = \frac{s^2}{4}; \quad r = \frac{s}{2}.$$

$$\text{Ikosaeder. — } \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2};$$

$$r^2 = \frac{s^2(5 + \sqrt{5})}{8}; \quad r = \frac{s}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}};$$

$$\varrho^2 = \frac{s^2}{24} (7 + 3\sqrt{5}); \quad \varrho = \frac{s}{12} \sqrt{42 + 18\sqrt{5}};^*)$$

$$r^2 = \frac{s^2}{8} (3 + \sqrt{5}); \quad r = \frac{s}{4} \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}.$$

---

\*) Mittelst T. I, 120a lässt sich der Wert  $\varrho = \frac{s\sqrt{6}}{12} \sqrt{7 + 3\sqrt{5}}$  noch auf die Form  $\varrho = \frac{s\sqrt{3}}{12} (3 + \sqrt{5})$  bringen, da nach jener Formel  $\sqrt{7 + 3\sqrt{5}} = \sqrt{7 + \sqrt{7^2 - 2^2}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$  ist. Eine gleiche Vereinfachung gestattet der Ausdruck für r.



Für das von Vierecken begrenzte Polyeder ist

$$s = r_1 \sqrt{2}; \quad r_1^2 = \frac{s^2}{2};$$

also:

$$1) \quad r^2 = \frac{s^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right); \quad 2) \quad \varrho^2 = r^2 - \frac{s^2}{2}; \quad 3) \quad r^2 = \varrho^2 + \frac{s^2}{4}.$$

$$\text{Hexaeder. — } \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 1; \quad r^2 = \frac{3s^2}{4}; \quad r = \frac{s}{2} \sqrt{3};$$

$$\varrho^2 = \frac{s^2}{4}; \quad \varrho = \frac{s}{2};$$

$$r^2 = \frac{s^2}{2}; \quad r = \frac{s}{2} \sqrt{2}.$$

Für das von Fünfecken begrenzte Polyeder ist

$$s = r_1 \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}; \quad r_1^2 = \frac{s^2(5 + \sqrt{5})}{10};$$

also:

$$1) \quad r^2 = \frac{s^2}{10} \left[ 5 + \sqrt{5} + \frac{(5 + 2\sqrt{5})}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right]; \quad 2) \quad \varrho^2 = r^2 - \frac{s^2(5 + \sqrt{5})}{10};$$

$$3) \quad r^2 = \varrho^2 + \frac{s^2(5 + 2\sqrt{5})}{20}.$$

$$\text{Dodekaeder. — } \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})}};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2};$$

$$r^2 = \frac{3s^2(3 + \sqrt{5})}{8}; \quad r = \frac{s}{4} \sqrt{18 + 6\sqrt{5}};$$

$$\varrho^2 = \frac{s^2}{40} (25 + 11\sqrt{5}); \quad \varrho = \frac{s}{20} \sqrt{250 + 110\sqrt{5}};$$

$$r^2 = \frac{s^2}{8} (7 + 3\sqrt{5}); \quad r = \frac{s}{4} \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}.$$

Anm. Man drücke umgekehrt die Kante  $s$  jedes Polyeders durch die Radien der zugehörigen Kugeln aus.

**100. Oberfläche.** — Allgemeine Formel. — Sei  $m$  die Zahl der  $n$ -Ecke, welche ein regelmässiges Polyeder begrenzen,



so ist die Fläche des Bestimmungsdreiecks  $\overline{AO_1B}$  eines dieser  $n$ -Ecke  $\frac{s\varrho_1}{2}$ ; mithin die Gesamt-Oberfläche des Polyeders

$$f^2 = \frac{mns\varrho_1}{2}.$$

Für die von Dreiecken begrenzten Polyeder ist (nach voriger Nr.)

$$n = 3; \quad \varrho_1 = \sqrt{r_1^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{s}{6} \sqrt{3},$$

also 
$$f^2 = \frac{ms^2}{4} \sqrt{3}.$$

Tetraeder. —  $f^2 = s^2 \sqrt{3}.$

Oktaeder. —  $f^2 = 2s^2 \sqrt{3}.$

Ikosaeder. —  $f^2 = 5s^2 \sqrt{3}.$

Für das von Vierecken begrenzte Polyeder ist

$$n = 4; \quad \varrho_1 = \sqrt{r_1^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{s}{2};$$

also 
$$f^2 = ms^2.$$

Hexaeder. —  $f^2 = 6s^2.$

Für das von Fünfecken begrenzte Polyeder ist

$$n = 5; \quad \varrho_1 = \sqrt{r_1^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{s}{10} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}};$$

also 
$$f^2 = \frac{ms^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}.$$

Dodekaeder. —  $f^2 = 3s^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}.$

**101. Volumen.** — Nach 289 ist das Volumen eines regelmässigen Polyeders gleich  $\frac{f^2\varrho}{3}.$

Tetraeder. —  $f^2 = s^2 \sqrt{3}, \quad \varrho = \frac{s}{12} \sqrt{6};$  also

$$\mathfrak{V} = \frac{s^3}{12} \sqrt{2}.$$

Oktaeder. —  $f^2 = 2s^2 \sqrt{3}, \quad \varrho = \frac{s}{6} \sqrt{6};$  also

$$\mathfrak{V} = \frac{s^3}{3} \sqrt{2}.$$



Ikosaeder. —  $f^2 = 5s^2\sqrt{3}$ ,  $\varrho = \frac{s}{12}\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})$ ; also

$$\mathfrak{B} = \frac{5s^3}{12}(3 + \sqrt{5}).$$

Hexaeder. —  $f^2 = 6s^2$ ,  $\varrho = \frac{s}{2}$ ; also

$$\mathfrak{B} = s^3.$$

Dodekaeder. —

$$f^2 = 3s^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}; \varrho = \frac{s}{20}\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}; \text{ also}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{s^3}{4}\sqrt{470 + 210\sqrt{5}}. *)$$

### 3) Krummflächige Körper.

#### a) Der Cylinder. \*\*)

**102. Oberfläche des Mantels. Der gerade Cylinder.** — Der gerade Cylinder ist nach Nr. 59 ein specieller Fall des geraden Prismas. Ist die Höhe des letzteren gleich  $h$ , seine Grundkanten gleich  $a, b, c \dots$ , so ist die Oberfläche seiner Seitenflächen gleich  $ah + bh + ch + \dots = (a + b + c + \dots)h$ ; d. h. gleich dem Produkt aus dem Umfang der Grundfläche und der Höhe. Hieraus folgt der Satz:

Die Mantelfläche eines geraden Cylinders ist 290. gleich dem Produkt aus dem Umfang seiner Grundfläche und seiner Höhe.

Ist der Cylinder von einer gemeinen Cylinderfläche begrenzt, so ist der Umfang seiner Grundfläche gleich  $2r\pi$ , und die Mantelfläche wird durch die Formel ausgedrückt

$$f^2 = 2r\pi h. \quad 291.$$

Anm. Die Mantelfläche eines geraden Cylinders ist also gleich einem Rechteck, dessen Seiten der Umfang seiner Grundfläche und seine Höhe sind.

Durchschneidet man die Mantelfläche mittelst einer Seitenlinie, so lässt sich der Mantel, ohne die Grösse seiner Oberfläche zu verändern, in

---

\*) Mittelst T. I, 120a lässt sich der Wert  $\mathfrak{B} = \frac{s^3\sqrt{10}}{4}\sqrt{47 + 21\sqrt{5}}$

noch auf die Form  $\mathfrak{B} = \frac{s^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})$  bringen, da nach jener Formel

$\sqrt{47 + 21\sqrt{5}} = \sqrt{47 + \sqrt{47^2 - 2^2}}$  ist.

\*\*) Es ist im folgenden stets von Cylindern mit parallelen Grundflächen die Rede.



ein ebenes Rechteck aufrollen, dessen Grundlinie gleich dem Umfang der Grundfläche, dessen Höhe gleich der Höhe des Cylinders ist. Auch diese Betrachtung liefert den Satz 290.

Wendet man dasselbe Verfahren auf die Mantelfläche eines schiefen Cylinders an, so erhält man eine von zwei parallelen gleichlangen geraden Strecken ( $AB$  und  $A_1B_1$ ) und zwei kongruenten krummen Linien begrenzte Figur, welche mit dem Rechteck  $\overline{ABB_1A_1}$  gleiche Fläche hat. Da  $AB$  die Seitenlinie des Cylinders, und  $AA_1$  gleich dem Umfange eines Normalschnittes ist, so hat man den Satz:

292. Die Mantelfläche eines schiefen Cylinders ist gleich dem Produkt aus dem Umfange seines Normalschnittes und seiner Seitenlinie.

Da beim schiefen Cylinder Grundfläche und Normalschnitt nicht gleichzeitig Kreise sein können, so kann die Mantelfläche des gemeinen schiefen Cylinders nicht elementar berechnet werden.

**103. Volumen.** — Aus 285 folgt:

293. Das Volumen jedes Cylinders ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe.

Beim gemeinen Cylinder ist der Inhalt der Grundfläche gleich  $r^2\pi$ , und sein Volumen wird daher durch die Formel ausgedrückt:

294. 
$$\mathfrak{V} = r^2\pi h.$$

b) Der Kegel. \*)

**104. Oberfläche des Mantels.** Der gerade Kegel. — Der gerade Kegel ist nach Nr. 47 ein specieller Fall der geraden Pyramide. Ist die Höhe einer Seitenfläche der letzteren gleich  $h$ , ihre Grundkanten gleich  $a, b, c, \dots$ , so ist die Oberfläche ihrer Seitenflächen gleich  $\frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} + \frac{ch}{2} + \dots = (a + b + c + \dots) \frac{h}{2}$ ; d. h. gleich dem halben Produkte aus dem Umfang der Grundfläche und der Höhe der Seitenflächen. Da die letztere beim Uebergang in den Kegel sich in die Seitenlinie des letzteren verwandelt, so hat man den Satz:

295. Die Mantelfläche eines geraden Kegels ist gleich dem halben Produkt aus dem Umfang des Grundkreises und der Seitenlinie.

In Formel ausgedrückt:

296. 
$$f^2 = r\pi s.$$

Anm. Die Mantelfläche eines geraden Kegels ist also gleich einem Dreieck, dessen Grundlinie der Umfang des Grundkreises, dessen Höhe die Seitenlinie ist.

Durchschneidet man die Mantelfläche mittelst einer Seitenlinie, so lässt sich der Mantel, ohne die Grösse seiner Oberfläche zu verändern, in

---

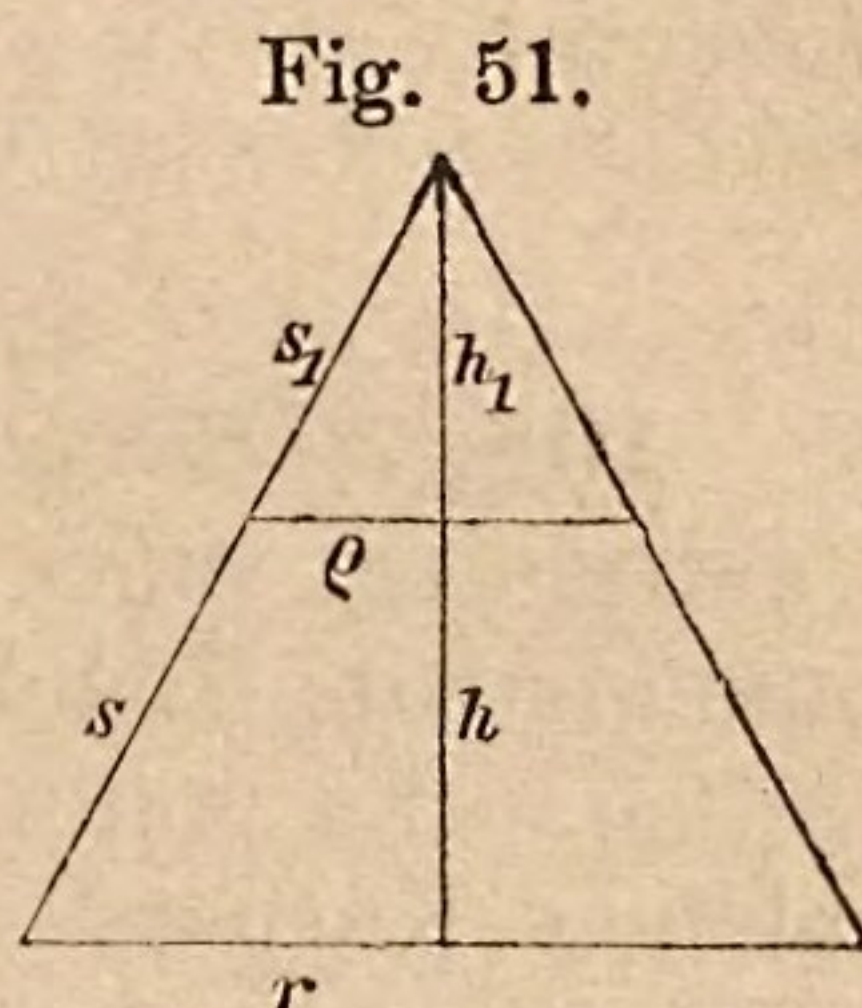
\*) Es ist im folgenden stets vom gemeinen Kegel die Rede.



einen ebenen Kreissektor aufrollen, dessen Bogen gleich dem Umfang des Grundkreises, dessen Radius gleich der Seitenlinie ist. Auch diese Betrachtung liefert den Satz 295 (nach T. II, 374).

Wendet man dasselbe Verfahren auf die Mantelfläche eines schiefen Kegels an, so erhält man eine von zwei sich schneidenden gleichlangen geraden Strecken ( $OA$  und  $OB$ ) und einer krummen Linie begrenzte Figur, deren Fläche sich weder durch Stücke des Kegels ausdrücken noch elementar berechnen lässt.

**105. Der gerade Kegelstumpf.** — Die Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes ist gleich der Differenz der Mantelflächen zweier gerader Kegel. Wenn  $s, r, \varrho$  der Reihe nach die Seitenlinie und die Radien der Grundkreise des Kegelstumpfes bedeuten,  $s_1$  die Seitenlinie des Ergänzungskegels (Fig. 51), so ist hiernach die Mantelfläche des Kegelstumpfes



$$f^2 = r\pi(s + s_1) - \varrho\pi s_1 = r\pi s + \pi s_1(r - \varrho).$$

Nun ist 
$$\frac{s + s_1}{s_1} = \frac{r}{\varrho}, \text{ oder } \frac{s}{s_1} = \frac{r - \varrho}{\varrho}$$

oder 
$$s_1(r - \varrho) = \varrho s,$$

also, wenn man diesen Wert oben einsetzt:

$$f^2 = r\pi s + \varrho\pi s = (r + \varrho)\pi s; \quad 297.$$

d. h.: Die Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes 298, ist gleich dem Produkt aus dem arithmetischen Mittel der Peripherieen seiner Grundkreise und der Seitenlinie.

Anm. Mit welchem Kegel hat hiernach der Kegelstumpf gleiche Mantelfläche? — Aufrollung der Mantelfläche analog wie in voriger Nr. Für  $\varrho = r$  geht 297 in 291 über, für  $\varrho = 0$  in 296.

**106. Volumen.** — *Der gemeine Kegel.* — Aus 287 folgt: Das Volumen jedes Kegels ist gleich dem dritten 299, Teile des Produktes aus Grundfläche und Höhe.

Beim gemeinen Kegel ist der Inhalt der Grundfläche gleich  $r^2\pi$ , und sein Volumen wird daher durch die Formel ausgedrückt:

$$\mathfrak{V} = \frac{r^2\pi h}{3}. \quad 300.$$

**107. Der gemeine Kegelstumpf.** — Aus 288 folgt:

Das Volumen jedes Kegelstumpfes ist gleich dem 301, dritten Teile des Produktes aus seiner Höhe und der Summe seiner Grundflächen und des geometrischen Mittels derselben.



Beim gemeinen Kegelstumpf sind die Grundflächen gleich  $r^2\pi$  und  $\varrho^2\pi$ , ihr geometrisches Mittel gleich  $\sqrt{r^2\pi \cdot \varrho^2\pi} = r\varrho\pi$ ; sein Volumen wird daher durch die Formel ausgedrückt:

$$302. \quad \mathfrak{V} = \frac{h\pi}{3} (r^2 + r\varrho + \varrho^2).$$

Anm. Mit welchem Kegel hat hiernach der Kegelstumpf gleiches Volumen? — Für  $\varrho = r$  geht 302 in 294 über, für  $\varrho = 0$  in 300. — Zwischen  $s$ ,  $h$ ,  $r$ ,  $\varrho$  besteht die Formel  $s^2 = h^2 + (r - \varrho)^2$ . —

### c) Rotationskörper.

**108. Vorbemerkung.** — Nach Nr. 74 lässt sich jeder durch Umdrehung eines Polygons entstehende Rotationskörper als Summe von Kegelstumpfen (bezw. Kegeln und Cylindern) darstellen. Es kann daher auch Oberfläche und Volumen eines solchen Körpers mit Hilfe der in Nr. 102—107 gegebenen Formeln gefunden werden. — Wir betrachten im folgenden nur solche Körper, welche durch Umdrehung eines regelmässigen Polygons entstehen, weil für diese Körper noch besonders einfache Formeln abgeleitet werden können. — Es sind dabei zwei Hauptfälle zu unterscheiden: 1) Rotation um eine durch den Mittelpunkt und eine Ecke gehende Axe, 2) Rotation um eine die Figur nicht schneidende Axe.

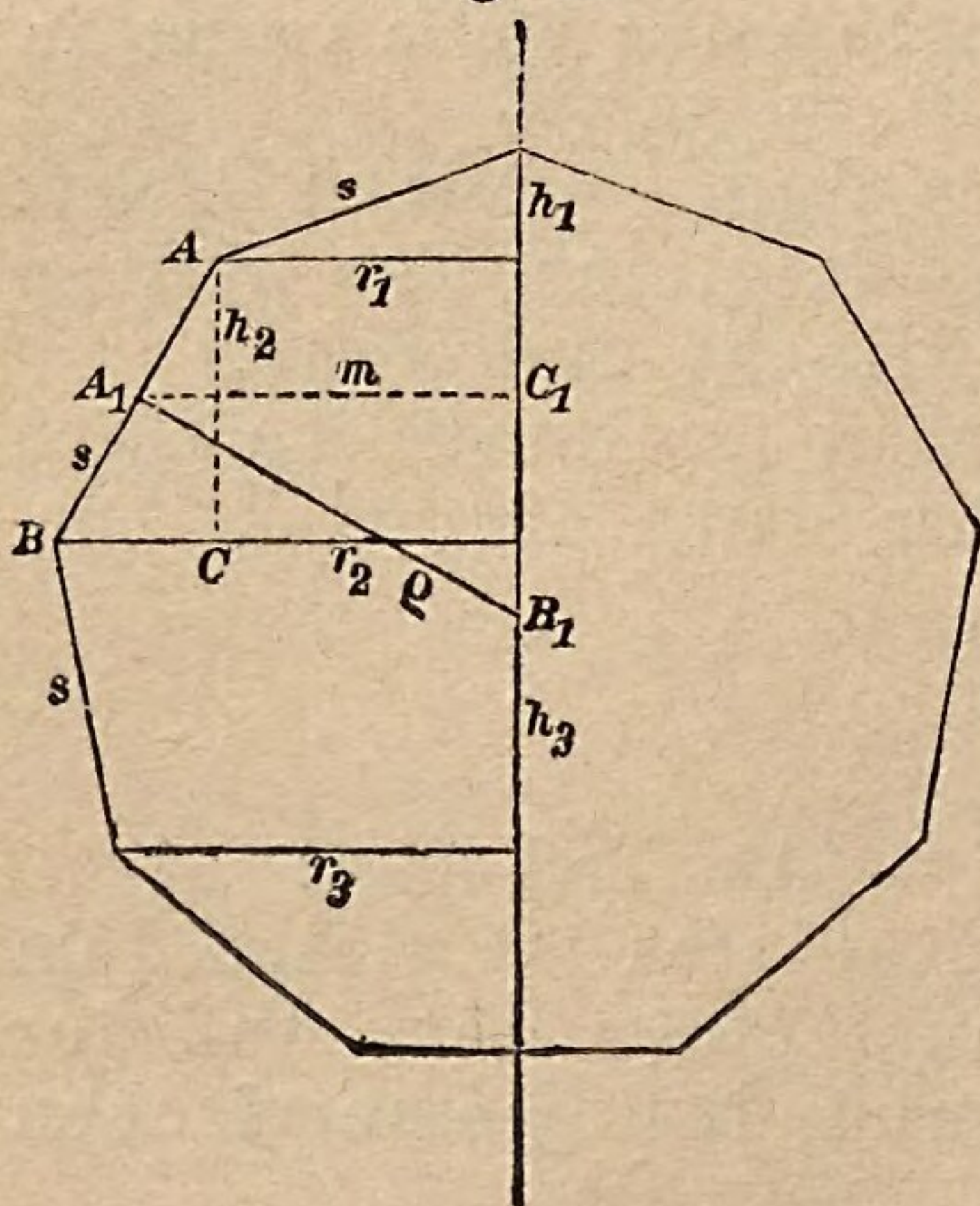
#### I. Rotation um eine durch den Mittelpunkt und eine Ecke gehende Axe.

**109. Oberfläche des Rotationskörpers.** — Macht ein regelmässiges Polygon eine halbe Umdrehung um eine durch den Mittelpunkt und eine Ecke gehende Axe, so besteht die Oberfläche des Rotationskörpers im allgemeinen aus den Mantelflächen von Kegelstumpfen.

Anm. Hierzu treten, wenn die Seitenzahl des Polygons  $4n$  ist, zwei Kegelflächen, von denen eine, wenn die Seitenzahl  $2n + 1$  ist, in eine ebene Kreisfläche übergeht (Fig. 52), und zu welchen, wenn die Seitenzahl  $2n + 2$  ist, noch eine Cylinderfläche tritt. Da jedoch alle diese Flächen als specielle Fälle der Mantelfläche des Kegelstumpfes angesehen werden können, so genügt es, die letztere allein zu betrachten.

Sei  $AB = s$  eine Seite des Polygons und  $r_1$  und  $r_2$  die aus

Fig. 52.





ihren Endpunkten auf die Drehungsaxe gefällten Senkrechten, so ist die von  $s$  beschriebene Kegelstumpffläche (nach 297)

$$f_2^2 = (r_1 + r_2)\pi s,$$

oder, wenn  $A_1C_1 = m$  die Mittellinie des aus  $r_1, s, r_2$  gebildeten Trapezes, also  $m = \frac{r_1 + r_2}{2}$  ist,

$$f_2^2 = 2m\pi s.$$

Ist ferner  $A_1B_1 = \varrho$  der kleine Radius des Polygons, und  $AC = h_2$  die Höhe des Trapezes, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke  $\overline{ABC}$  und  $\overline{A_1B_1C_1}$ :

$$\frac{s}{h_2} = \frac{\varrho}{m}, \text{ oder } ms = \varrho h_2.$$

Dies oben eingesetzt, giebt:

$$f_2^2 = 2\varrho\pi h_2. \quad 303.$$

Die Oberfläche des ganzen Rotationskörpers ist hiernach

$$f^2 = 2\varrho\pi(h_1 + h_2 + \dots).$$

Anm. Die Formel 303 kann für den Kegel direkt ebenso wie für den Kegelstumpf abgeleitet werden. Für den Cylinder stimmt sie mit 291 überein.

Ist  $r$  der grosse Radius des Polygons, so ist bei gerader Seitenzahl desselben

$$h_1 + h_2 + \dots = 2r,$$

also

$$f^2 = 4r\varrho\pi. \quad 304.$$

Bei ungerader Seitenzahl ist

$$h_1 + h_2 + \dots = r + \varrho,$$

also zunächst  $f^2 = 2\varrho\pi(r + \varrho)$ . Hierzu tritt noch die Fläche des ebenen Kreises, die als Mantelfläche eines Kegels mit der Höhe 0 in der Formel nicht mitbegriffen ist, mit dem Werte  $\frac{s^2}{4}\pi$ , so dass im ganzen

$$f^2 = \left[ 2\varrho(r + \varrho) + \frac{s^2}{4} \right] \pi \quad 305.$$

ist.

Anm. Dreht sich ein regelmässiges Polygon von gerader Seitenzahl um seinen kleinen (statt um seinen grossen) Durchmesser, so ist in 303

$h_2 = 2\varrho$  zu setzen und  $2 \cdot \frac{s^2}{4}\pi = \frac{s^2}{2}\pi$  zu addieren. Man erhält also

$$f^2 = \left( 4\varrho^2 + \frac{s^2}{2} \right) \pi. \quad 306.$$



**110. Oberfläche der Kugel.** — Geht das regelmässige Polygon durch unendliche Verdoppelung seiner Seitenzahl in einen Kreis über, so verwandelt sich der von ihm beschriebene Rotationskörper in eine Kugel, und da in diesem Falle  $\varrho = r$  ist, so folgt für die Oberfläche der Kugel aus 304 der Ausdruck

307. 
$$f^2 = 4r^2\pi.$$

Anm. Die Oberfläche der Kugel ist also, da  $4r^2\pi = 2r\pi \cdot 2r$  ist, nach 291 gleich der Mantelfläche des der Kugel umbeschriebenen geraden Cylinders. — Da die Kugeloberfläche nicht durch Bewegung einer Geraden entstanden ist, so lässt sie sich auch nicht in eine Ebene aufrollen.

Aus 307 folgt noch der Satz:

308. Bei der Halbkugel ist die krumme Fläche doppelt so gross als die ebene.

**111. Kugelzone und Kugelkappe.** — Betrachtet man nur eine Kegelstumpffläche des Rotationskörpers, so geht dieselbe bei unendlicher Verdoppelung der Seitenzahl in eine Kugelzone (oder, wenn es eine der Kegelflächen war, in eine Kugelkappe) über, und man erhält für die krumme Oberfläche der Kugelzone oder Kugelkappe aus 303 den Ausdruck

309. 
$$f^2 = 2r\pi h,$$

worin  $r$  den Kugelradius,  $h$  die Höhe der Zone oder Kappe bedeutet. — Aus 309 folgt:

310. Zonen und Kappen derselben Kugel haben bei gleicher Höhe auch gleiche Oberfläche.

**112. Kugelzweieck.** — Ist  $\alpha$  der Centriwinkel eines Kugelzweiecks, so ist nach 83

311. 
$$\frac{f^2}{4r^2\pi} = \frac{\alpha}{4R}, \text{ oder } f^2 = r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{R}.$$

**113. Kugeldreieck.** — Es seien  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  die Winkel eines Kugeldreiecks. Vervollständigt man die Seiten desselben zu grössten Kreisen, so entstehen (entsprechend den drei Nebenecken der zu dem Kugeldreieck gehörigen Ecke) drei Nebendreiecke, welche mit dem gegebenen Dreieck der Reihe nach Kugelzweiecke mit den Centriwinkeln  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  bilden. Sind nun  $f^2$ ,  $f_1^2$ ,  $f_2^2$ ,  $f_3^2$  der Reihe nach die Oberflächen des gegebenen Dreiecks und seiner Nebendreiecke, und setzt man zur Abkürzung

1) 
$$\frac{r^2\pi}{R} = z^2,$$

so folgt aus 311:

2) 
$$f^2 + f_1^2 = \alpha z^2, f^2 + f_2^2 = \beta z^2, f^2 + f_3^2 = \gamma z^2;$$



folglich durch Addition:

$$3) \quad 3f^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = (\alpha + \beta + \gamma)z^2.$$

Setzt man nun für eins der Nebendreiecke, z. B.  $f_3^2$  das mit ihm symmetrische Scheiteldreieck (99), so sieht man, dass die vier Dreiecke zusammen die Fläche einer Halbkugel bilden. Es ist also

$$4) \quad f^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 2r^2\pi = 2Rz^2 \text{ [nach 1)],}$$

und, wenn man diesen Wert in 3) einsetzt:

$$2f^2 + 2Rz^2 = (\alpha + \beta + \gamma)z^2,$$

$$\text{oder} \quad f^2 = \frac{(\alpha + \beta + \gamma - 2R)z^2}{2} = \frac{(\alpha + \beta + \gamma - 2R)r^2\pi}{2R}. \quad 312.$$

Anm. Die Grösse  $\alpha + \beta + \gamma - 2R$  heisst der sphärische Excess des Kugeldreiecks. — Berechnung der Oberfläche eines Kugelpolygons durch Zerlegung in Dreiecke. Spezieller Fall des regelmässigen Polygons, insbesondere der zu den Seiten eines regelmässigen Polyeders gehörigen regelmässigen Polygone.

Schreibt man 312 in der Form  $\frac{f^2}{r^2\pi} = \frac{(\alpha + \beta + \gamma - 2R)}{2R}$ , so wird für  $r = \infty$  die linke Seite gleich Null; also muss auch  $\alpha + \beta + \gamma = 2R$  sein; d. h.: für das ebene Dreieck gilt der bekannte Satz der Winkelsumme, für den hierdurch ein neuer Beweis erbracht ist.

Das Volumen eines Rotationskörpers, welcher durch die oben vorausgesetzte Rotation entstanden ist, lässt sich nicht durch eine einfache Formel ausdrücken. Das Volumen der Kugel wird von einem anderen Gesichtspunkte aus gefunden.

**114. Volumen der Kugel.** — Von einem der Kugel umbeschriebenen Polyeder kann man durch Tangentenebenen Pyramiden abschneiden, und so das Volumen des Polyeders beständig verringern. Denkt man sich dieses Verfahren ins Unendliche fortgesetzt, so nähert sich das Volumen des Polyeders dem der Kugel als Grenze; mithin gilt der Satz 289 auch für die Kugel, und liefert die Formel

$$\mathfrak{V} = \frac{4r^2\pi \cdot r}{3},$$

$$\text{oder} \quad \mathfrak{V} = \frac{4}{3}r^3\pi. \quad 313.$$

**115. Kugelkegel.** — Betrachtet man nur einen Teil der Oberfläche des Polyeders und legt durch die Grenzkanten dieses Teils und den Kugelmittelpunkt Ebenen, so begrenzen dieselben einen aus Pyramiden bestehenden Körper, dessen Volumen ebenfalls gleich dem dritten Teile des Produktes aus der Summe der Grundflächen und dem Kugelradius ist. Das



oben beschriebene Verfahren liefert dann einen Kugelkegel. Ist die krumme Fläche desselben eine Kugelkappe, so ist sein Volumen nach 289 und 309:

$$314. \quad \mathfrak{V} = 2r\pi h \cdot \frac{r}{3} = \frac{2}{3} r^2 \pi h.$$

Hierin ist  $h$  die Höhe der zu dem Kugelkegel gehörigen Kappe.

Ist  $\alpha$  der Centriwinkel des Kugelkegels, so ist die Höhe des Kegels, welcher die Kugelkappe zum Kugelkegel ergänzt,

$$r - h = r \cdot \cos \frac{\alpha}{2},$$

woraus folgt

$$h = r \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 2r \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{4} \quad (\text{T. III, 43}).$$

Setzt man diesen Wert in 314 ein, so folgt:

$$\mathfrak{V} = \frac{4}{3} r^3 \pi \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{4}.$$

315. Anm. Für  $h = 2r$  geht 314, und für  $\alpha = 4R$  geht 315 in 313 über.

**116. Kugelkappe.** — Ihr Volumen ist die Differenz zwischen dem eines Kugelkegels (314) und dem eines Kegels, in welchem die Höhe gleich  $(r - h)$ , der Radius der Grundfläche gleich  $\sqrt{r^2 - (r - h)^2} = \sqrt{(2r - h)h}$  ist. Das Volumen des Kegels ist also (300)  $\frac{(2r - h)h(r - h)\pi}{3}$ , und das der Kugelkappe

$$\mathfrak{V} = \frac{2r^2\pi h}{3} - \frac{(2r - h)h(r - h)\pi}{3} = \frac{h\pi}{3} [2r^2 - (2r - h)(r - h)]$$

oder

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h).$$

316. Hat die Grundfläche der Kugelkappe den Radius  $\varrho$ , so ist

$$\varrho^2 + (r - h)^2 = r^2,$$

316a.

woraus folgt:

$$r = \frac{\varrho^2 + h^2}{2h}.$$

Setzt man diesen Wert in 316 ein, so folgt:

$$317. \quad \mathfrak{V} = \frac{1}{6} \pi h (3\varrho^2 + h^2).$$

Anm. Für  $h = 2r$  geht 316 in 313, für  $\varrho = h = r$  geht 317 in das Volumen der Halbkugel über.



**117. Kugelzone.** — Ihr Volumen ist die Differenz zwischen der ganzen Kugel und der Summe der beiden Kugelhappen, welche sie zur ganzen Kugel ergänzen. Ist  $h$  die Höhe der Kugelzone, und  $k$  die Höhe der einen Kugelhappe, so ist  $k_1 = 2r - h - k$  die Höhe der andern Kugelhappe, und

$$\begin{aligned}\mathfrak{V} &= \frac{4}{3} r^3 \pi - \frac{1}{3} \pi k^2 (3r - k) - \frac{1}{3} \pi k_1^2 (3r - k_1) \\ &= \frac{\pi}{3} [4r^3 - 3r(k^2 + k_1^2) + (k^3 + k_1^3)].\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}k^2 + k_1^2 &= (k + k_1)^2 - 2kk_1, \\ k^3 + k_1^3 &= (k + k_1)^3 - 3kk_1(k + k_1); \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\mathfrak{V} &= \frac{\pi}{3} [4r^3 - 3r(k + k_1)^2 + 6rkk_1 + (k + k_1)^3 - 3kk_1(k + k_1)] \\ &= \frac{\pi}{3} [4r^3 + (k + k_1)^2(k + k_1 - 3r) + 3kk_1(2r - (k + k_1))],\end{aligned}$$

oder, da  
ist:

$$k + k_1 = 2r - h$$

$$\mathfrak{V} = \frac{\pi}{3} [4r^3 - (2r - h)^2(r + h) + 3kk_1h],$$

$$\text{oder } \mathfrak{V} = \frac{\pi}{3} [h^2(3r - h) + 3kk_1h] = \frac{1}{3} \pi h^2(3r - h) + \pi hkk_1. \quad 318.$$

Anm. Das Volumen einer Kugelzone ist also um die Grösse  $\pi hkk_1$  grösser als dasjenige der gleichhohen Kugelhappe (316).

Sind  $\varrho$  und  $\varrho_1$  die Radien der Grundflächen der Kugelzone, so ist zunächst (316a)

$$\varrho^2 = 2rk - k^2, \quad \varrho_1^2 = 2rk_1 - k_1^2;$$

$$\begin{aligned}\text{also } \varrho^2 + \varrho_1^2 &= 2r(k + k_1) - (k^2 + k_1^2) \\ &= 2r(k + k_1) - (k + k_1)^2 + 2kk_1 \\ &= (k + k_1)[2r - (k + k_1)] + 2kk_1 \\ &= (k + k_1)h + 2kk_1 = (2r - h)h + 2kk_1.\end{aligned}$$

$$\text{Ferner } \frac{3(\varrho^2 + \varrho_1^2) + h^2}{2} = (3r - h)h + 3kk_1.$$

Setzt man diesen Wert in 318 ein, so folgt:

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{6} \pi h [3(\varrho^2 + \varrho_1^2) + h^2]. \quad 319.$$

Anm. Für  $k$  oder  $k_1 = 0$  geht 318 in 316, für  $\varrho_1 = 0$  geht 319 in 317 über.



**118. Kugelzweieck.** — Nach Nr. 115 ist das Volumen eines von einem Kugelzweieck begrenzten Ausschnittes gleich dem dritten Teile des Produktes aus seiner Oberfläche und dem Kugelradius, also nach 311

$$320. \quad \mathfrak{V} = r^2 \pi \cdot \frac{\alpha}{R} \cdot \frac{r}{3} = \frac{1}{3} r^3 \pi \cdot \frac{\alpha}{R}.$$

Anm. Für  $\alpha = 4R$  geht 320 in 313 über.

**119. Kugeldreieck.** — Analog wie in voriger Nr. ist das Volumen eines von einem Kugeldreieck begrenzten Ausschnittes nach 312

$$321. \quad \mathfrak{V} = (\alpha + \beta + \gamma - 2R) \frac{r^2 \pi}{2R} \cdot \frac{r}{3} = \frac{1}{3} r^3 \pi \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma - 2R}{2R}.$$

Anm. Ist  $\gamma = 2R$ , so geht das Kugeldreieck in ein Zweieck über. Dann ist  $\beta = \alpha$ , und 321 geht in 320 über. Durch welche Annahmen geht also 321 in 313 über?

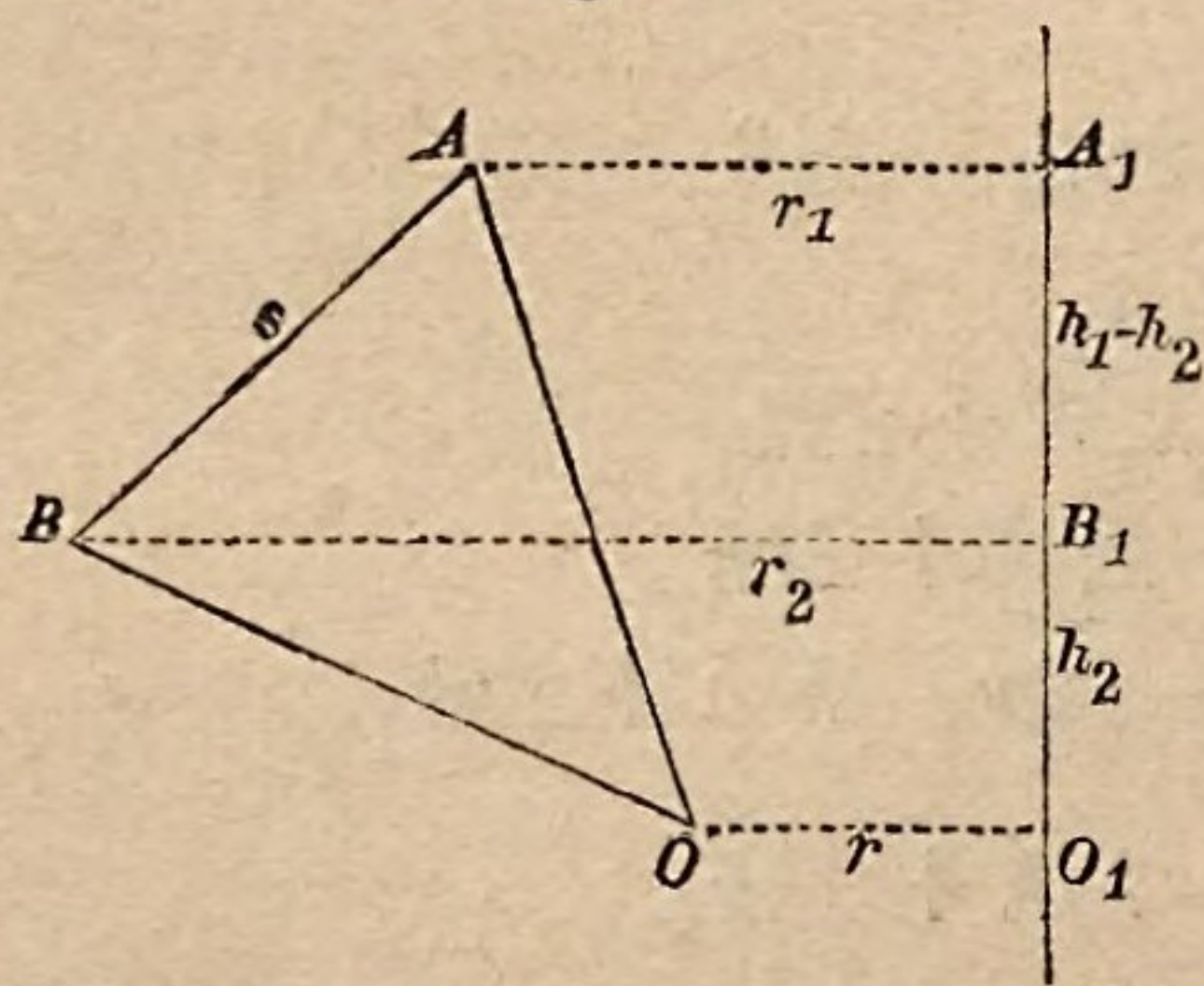
## 2. Rotation um eine die Figur nicht schneidende Axe.

**120. Oberfläche des Rotationskörpers.** — Macht ein regelmässiges Polygon eine ganze Umdrehung um eine seine Fläche nicht schneidende Axe, so besteht die Oberfläche des Rotationskörpers im allgemeinen aus den Mantelflächen von Kegelstumpfen.

Anm. Ist eine Seite des Polygons der Axe parallel, so beschreibt sie eine Cylinderfläche; steht sie auf der Axe senkrecht, einen durch die Differenz zweier Kreisflächen gebildeten ebenen Ring.

Sei  $AB = s$  eine Seite des Polygons und  $r_1$  und  $r_2$  die aus ihren Endpunkten auf die Drehungsaxe gefällten Senkrechten, so ist die von  $s$  beschriebene Kegelstumpffläche (nach 297)

Fig. 53.



$$f_2^2 = (r_1 + r_2) \pi s.$$

Ebenso für die folgenden Polygonseiten

$$f_3^2 = (r_2 + r_3) \pi s$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f_1^2 = (r_n + r_1) \pi s;$$

also die Gesamtoberfläche des Rotationskörpers

$$f^2 = 2\pi s (r_1 + r_2 + \dots + r_n).$$

Wenn nun der Abstand des Mittelpunktes ( $O$ ) des Polygons von der Drehungsaxe mit  $r$  bezeichnet wird, so ist



$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = nr, *)$$

mithin

$$f^2 = 2nr\pi s.$$

322.

Da  $ns$  der Umfang des rotirenden Polygons und  $2r\pi$  die von seinem Mittelpunkte beschriebene Kreislinie ist, so drückt die letzte Formel den Satz aus:

Dreht sich ein regelmässiges Polygon um eine 323.  
seine Fläche nicht schneidende Axe, so ist die Oberfläche des Rotationskörpers gleich dem Produkte aus dem Umfange des Polygons und der von seinem Mittelpunkte beschriebenen Kreislinie.

Anm. Dieser Satz gilt auch für jede Drehung des Polygons, die nicht gleich  $4R$  ist; denn die Oberfläche des Rotationskörpers ist dem vom Mittelpunkte des Polygons beschriebenen Bogen proportional. Rückt in diesem letzteren Falle die Drehungsaxe in unendliche Entfernung, so verwandelt sich die Drehung in eine Verschiebung längs einer zur Ebene des Polygons senkrechten Geraden; der Rotationskörper verwandelt sich in ein gerades regelmässiges Prisma, und die Formel 322, in welcher man  $2r\pi$  durch  $h$  zu ersetzen hat, geht über in  $f^2 = ns \cdot h = n \cdot sh$ , und drückt, wie man sieht, die Summe der Seitenflächen dieses Prismas aus.

Geht das rotierende Polygon in einen Kreis über, dessen Radius  $\rho$  ist, so erhält man für die Oberfläche des durch Rotation eines Kreises um eine seine Fläche nicht schneidende Axe entstehenden Körpers die Formel

$$f^2 = 4r\rho\pi^2.$$

324.

Anm. Der im letzten Falle entstehende Körper hat die Gestalt eines Ringes mit kreisförmigem Querschnitt. Die ihn begrenzende krumme Fläche hat die Eigenschaft, dass sie nicht durch jede in sich zurückkehrende Linie, die auf ihrer Oberfläche gezogen wird, in zwei getrennte Teile zerfällt. Hierzu sind z. B. zwei Querschnitte nötig. Aus diesem Grunde nennt man die Fläche zweifach zusammenhängend. Welches wird hiernach das Merkmal einer einfach (oder mehrfach) zusammenhängenden Fläche sein? — Uebertragung dieses Begriffes auf Linien. — Die Fläche hat die weitere Eigenschaft, dass sie von einer Geraden in 0, 2 oder 4 Punkten geschnitten wird. Man suche weitere Eigenschaften der Fläche.

\*) Bezeichnet man die Mittellinien der durch  $AB, BC, \dots$  gebildeten Trapeze der Reihe nach mit  $m_1, m_2, \dots$ , so ist  $r_1 + r_2 = 2m_1, r_2 + r_3 = 2m_2, \dots, r_n + r_1 = 2m_n$ ; also durch Addition  $2(r_1 + r_2 + \dots + r_n) = 2(m_1 + m_2 + \dots + m_n)$ ; d. h.: Beschreibt man in ein regelmässiges  $n$ -Eck durch Verbindung der Mitten je zweier benachbarter Seiten ein neues regelmässiges  $n$ -Eck, so ist die Summe der Abstände der Ecken von einer beliebigen Geraden für beide Polygone dieselbe. Denkt man sich die Konstruktion ins Unendliche fortgesetzt, so nähert sich das Polygon dem Punkt  $O$  als Grenze, und die Summe der Abstände dem Werte  $nr$ , welcher, da die Summe der Abstände unverändert bleibt, dieser Summe gleich sein muss. — Einfacher lässt sich die Formel ableiten, wenn  $n$  eine gerade Zahl ist.



**121. Volumen des Rotationskörpers.** — Das Volumen des durch die in Nr. 120 vorausgesetzte Rotation entstehenden Körpers ist gleich der Summe der Volumina, welche durch Rotation der einzelnen Bestimmungsdreiecke des Polygons entstehen. Nun ist in Fig. 53 das Bestimmungsdreieck  $\overline{AOB}$  gleich der algebraischen Summe dreier Trapeze, nämlich

$$\overline{AOB} = \overline{AA_1B_1B} + \overline{BB_1O_1O} - \overline{AA_1O_1O},$$

mithin auch das Volumen  $\mathfrak{B}_1$  des durch Rotation von  $\overline{AOB}$  entstehenden Körpers gleich der algebraischen Summe der Volumina der durch Rotation jener Trapeze entstehenden Kegelstumpfe. Es ist also nach 302

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &= \frac{\pi}{3} [(h_1 - h_2)(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) + h_2(r^2 + rr_2 + r_2^2) - \\ &\quad h_1(r^2 + rr_1 + r_1^2)] \\ &= \frac{\pi}{3} [r^2(h_2 - h_1) + r(h_2r_2 - h_1r_1) + (h_1r_2 - h_2r_1)(r_1 + r_2)]. \end{aligned}$$

Ferner ist die Fläche  $f^2$  des Dreiecks  $\overline{AOB}$  nach obiger Formel ausgedrückt durch

$$\begin{aligned} 2f^2 &= (r_1 + r_2)(h_1 - h_2) + (r + r_2)h_2 - (r + r_1)h_1 \\ &= r(h_2 - h_1) + (h_1r_2 - h_2r_1). \end{aligned}$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Formel mit  $r + (r_1 + r_2)$ , so folgt:

$$2f^2(r + r_1 + r_2) = r^2(h_2 - h_1) + r(h_2r_2 - h_1r_1) + (h_1r_2 - h_2r_1)(r_1 + r_2).$$

Ersetzt man in der obigen Formel für  $\mathfrak{B}_1$  den Klammerausdruck rechts durch seinen aus der letzten Formel folgenden Wert, so erhält man

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{2f^2\pi}{3} (r + r_1 + r_2).$$

Ebenso für die übrigen Bestimmungsdreiecke:

$$\mathfrak{B}_2 = \frac{2f^2\pi}{3} (r + r_2 + r_3)$$

. . . . .

$$\mathfrak{B}_n = \frac{2f^2\pi}{3} (r + r_n + r_1).$$

Addiert man alle diese Ausdrücke, und berücksichtigt, dass (wie oben)

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = nr$$



ist, so erhält man

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2 + \dots + \mathfrak{V}_n = \frac{2f^2\pi}{3} (nr + nr + nr);$$

d. h.:

$$\mathfrak{V} = 2r\pi \cdot nf^2. \quad 325.$$

Da  $nf^2$  die Fläche des rotierenden Polygons und  $2r\pi$  die von seinem Mittelpunkte beschriebene Kreislinie ist, so drückt die letzte Formel den Satz aus:

Dreht sich ein regelmässiges Polygon um eine 326.  
seine Fläche nicht schneidende Axe, so ist das Volumen des Rotationskörpers gleich dem Produkte aus der Fläche des Polygons und der von seinem Mittelpunkte beschriebenen Kreislinie.

Anm. Man stelle analoge Betrachtungen an wie in der Anm. zu 323.

Geht das rotierende Polygon in einen Kreis über, dessen Radius  $\varrho$  ist, so erhält man für das Volumen des durch Rotation eines Kreises um eine seine Fläche nicht schneidende Axe entstehenden Körpers die Formel:

$$\mathfrak{V} = 2r\varrho^2\pi^2. \quad 327.$$



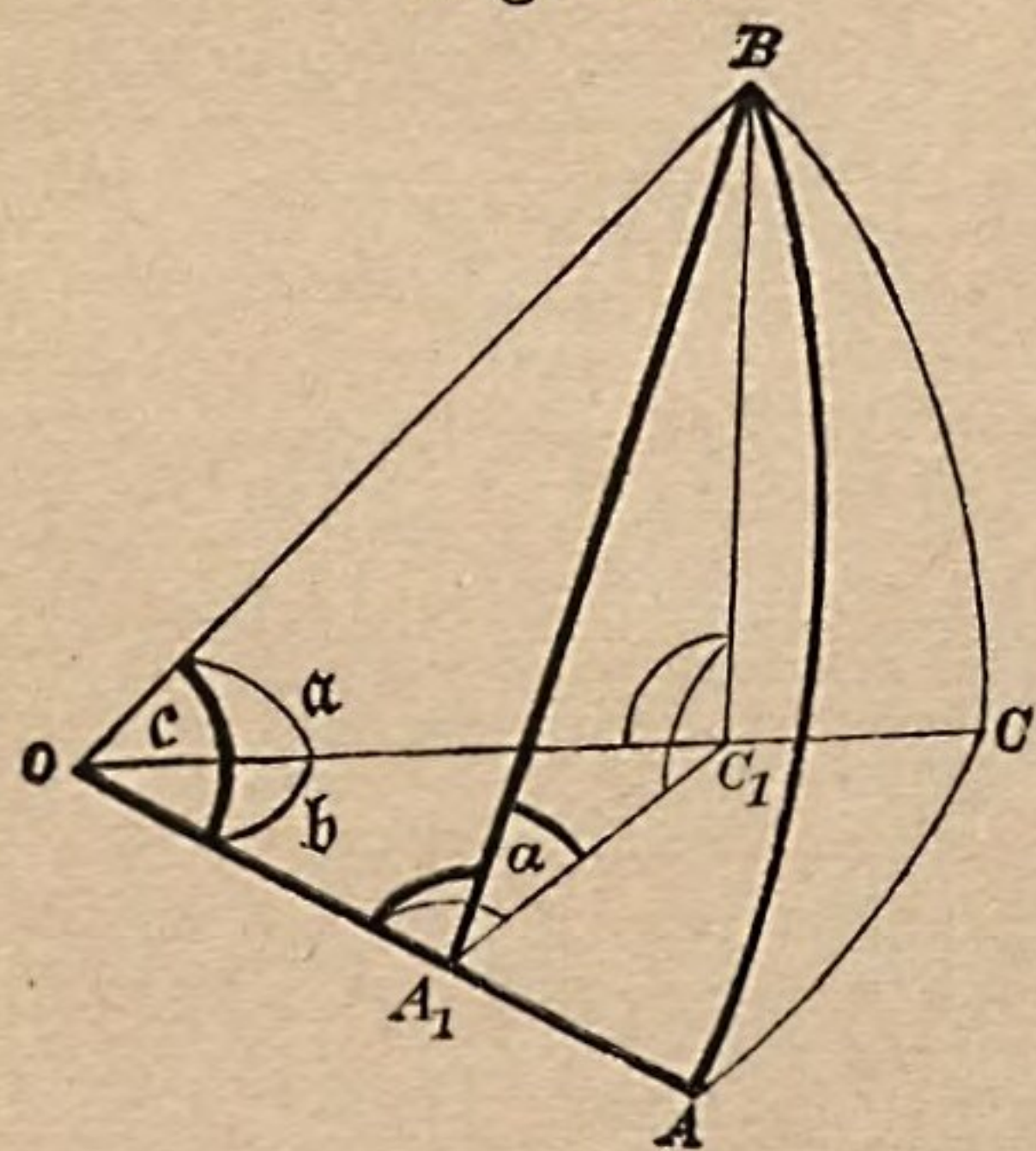
# Sphärische Trigonometrie.

**122. Vorbemerkung.** — Nach Nr. 38 ist durch jede dreiseitige Ecke ein Kugeldreieck, und durch jedes Kugeldreieck eine dreiseitige Ecke bestimmt. Da nun nach 102 die letztere durch drei ihrer Stücke bestimmt ist, so findet dasselbe auch mit dem Kugeldreieck statt. Und ebenso, wie es die Aufgabe der ebenen Trigonometrie ist, aus drei gegebenen Stücken eines ebenen Dreiecks die übrigen zu berechnen, so ist es die Aufgabe der sphärischen Trigonometrie, aus drei gegebenen Stücken eines Kugeldreiecks die übrigen zu bestimmen. — Da die Winkelsumme eines Kugeldreiecks ebenso wie die einer Ecke keine feste Grösse hat, so ist hier nicht, wie in der ebenen Trigonometrie, durch zwei Winkel des Dreiecks der dritte bestimmt. Andererseits lassen sich von den sechs möglichen Fällen der Bestimmung eines Kugeldreiecks (s. Nr. 33) drei auf die übrigen mittelst des Satzes 110 zurückführen. — Wir nehmen im folgenden an, dass die gegebenen Winkel konkave seien. Für konvexe Winkel sind nur (nach T. III, 31) die Vorzeichen einiger Funktionen zu ändern.

## I. Das rechtwinklige Kugeldreieck.

**123. Formeln.** — Sei  $O$  der Kugelmittelpunkt (Fig. 54),

Fig. 54.



$A, B$  und  $C$  die Eckpunkte eines rechtwinkligen Kugeldreiecks, dessen Seiten mit  $a, b$  und  $c$ , dessen Winkel mit  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  bezeichnet seien. Es sei ferner  $\gamma = R$ , so dass  $\overline{OBC} \perp \overline{OAC}$ . — Fällt man dann  $BA_1 \perp OA$ ,  $BC_1 \perp OC$  und zieht  $A_1C_1$ , so ist  $BC_1 \perp \overline{AOC}$  (53) also auch  $BC_1 \perp A_1C_1$ . Ferner ist  $A_1C_1$  der Neigungsschenkel der zur Ebene  $\overline{AOC}$  schiefen Strecke  $BA_1$ . Daher ist nach der Umkehrung von 65 auch  $A_1C_1 \perp OA$ . Da ausserdem  $BA_1 \perp OA$ ,



so ist  $BA_1C_1$  der Neigungswinkel der Ebenen  $\overline{BOA}$  und  $\overline{COA}$ , d. h.  $BA_1C_1 = \alpha$ . Nun ist

$$\sin a = \frac{BC_1}{OB} = \frac{BA_1 \sin \alpha}{OB} = \sin c \cdot \sin \alpha,$$

also 1)  $\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}; \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}.$  \*) 328.

Ferner  $\cos a = \frac{OC_1}{OB} = \frac{A_1C_1}{\sin b} : \frac{A_1B}{\sin c} = \frac{A_1C_1}{A_1B} : \frac{\sin b}{\sin c}.$   
also (nach 1b)

$$2) \cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}; \cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}. \quad 329.$$

Dividirt man endlich 1a) durch die aus 2a) folgende Formel

$$\cos \alpha = \cos a \cdot \sin \beta,$$

so folgt:  $tg \alpha = \frac{tg a}{\sin c \sin \beta},$

oder mit Rücksicht auf 1b)

$$3) \quad tg \alpha = \frac{tg a}{\sin b}; \quad tg \beta = \frac{tg b}{\sin a}. \quad 330.$$

Aus 3) folgt

$$\sin b = \frac{tg a}{tg \alpha}.$$

Da  $b < 2R$ , so ist  $\sin b$  stets positiv, d. h.  $tg a$  und  $tg \alpha$  sind stets gleichzeitig positiv oder negativ, folglich  $a$  und  $\alpha$  stets gleichzeitig spitz oder stumpf. D. h.:

Im rechtwinkligen Kugeldreieck ist jede Kathete 331. mit dem gegenüberliegenden Winkel stets gleichzeitig  $< R$  oder  $> R$ .

Ferner folgt aus Fig. 54:

$$\cos c = \frac{OA_1}{OB} = (OC_1 \cdot \cos b) : \frac{OC_1}{\cos a},$$

folglich  $\cos c = \cos a \cdot \cos b.$  332.

Sind nun  $a$  und  $b$  gleichzeitig spitz oder stumpf, so ist  $\cos c$  positiv, d. h.  $c$  spitz. Ist dagegen von den beiden Stücken das eine spitz, das andre stumpf, so ist  $\cos c$  negativ, d. h.  $c$  stumpf. Also:

\*) Denn man kann offenbar gleichzeitig  $a$  mit  $b$  und  $\alpha$  mit  $\beta$  vertauschen.



333. Im rechtwinkligen Kugeldreieck ist die Hypotenuse  $\leq R$ , wenn beide Katheten  $\leq R$  oder beide  $> R$  sind, andernfalls ist sie  $> R$ .

Anm. Rückt der Mittelpunkt der Kugel in unendliche Entfernung, während die Punkte  $A, B, C$  fest bleiben, so geht das Kugeldreieck in ein ebenes Dreieck über, dessen Winkel die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$ , dessen Seiten  $(a, b, c)$  die (nunmehr geradlinig gewordenen) Bogen der Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  sind. Da die Kugelradien  $OA, OB, OC$  einander parallel werden, so sind die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  sämtlich Null. Nun ist nach T. III, 47

$$a = \frac{\pi}{2R} a;$$

daher nach T. III, 53

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \dots = 1 - \left(\frac{\pi}{2R}\right)^2 \frac{a^2}{2!} + \left(\frac{\pi}{2R}\right)^4 \frac{a^4}{4!} - \dots$$

$$\frac{\sin a}{a} = 1 - \frac{a^2}{3!} + \frac{a^4}{5!} - \frac{a^6}{7!} + \dots = 1 - \left(\frac{\pi}{2R}\right)^2 \frac{a^2}{3!} + \left(\frac{\pi}{2R}\right)^4 \frac{a^4}{5!} - \dots$$

Setzt man nun  $a = 0$ , so folgt:

$$\cos a = 1, \sin a = a.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich aus folgender Betrachtung: Rückt  $O$  in unendliche Entfernung, so bilden  $OB$  und  $OC$  mit den in  $B$  und  $C$  gezogenen Tangenten, daher im Grenzfalle mit der Geraden  $BC$  selbst rechte Winkel. Es fällt also zuletzt  $BC_1$  mit  $BC$ , d. h. Punkt  $C_1$  mit  $C$  zusammen. Nun ist, wenn  $BC$  durch den Kugelradius gemessen wird,

$$\cos a = \frac{OC_1}{OC}; \quad \sin a = \frac{BC_1}{OC}; \quad \frac{\sin a}{a} = \frac{BC_1}{OC} : \frac{BC}{OC},$$

also im Grenzfalle

$$\cos a = \frac{OC}{OC} = 1; \quad \frac{\sin a}{a} = \frac{BC}{OC} : \frac{BC}{OC} = 1.$$

Setzt man diese Werte in den Formeln 1) bis 3) ein, so erhält man die Formeln des rechtwinkligen ebenen Dreiecks:

$$1) \sin \alpha = \frac{a}{c}; \quad 2) \cos \alpha = \sin \beta; \quad 3) \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

**124. Anwendung der Formeln.** — Die Formeln 1) bis 3) der vorigen Nr. reichen aus, um in jedem Falle aus zwei gegebenen Stücken des rechtwinkligen Kugeldreiecks die drei übrigen zu berechnen. Im ganzen kann man folgende sechs Aufgaben stellen:

|    | Gegeben:        | Gesucht:           | Formeln:    |
|----|-----------------|--------------------|-------------|
| 1. | $a, b$          | $\alpha, \beta, c$ | 3a, 3b, 1.  |
| 2. | $a, \alpha$     | $b, \beta, c$      | 3a, 3b, 1.  |
| 3. | $\alpha, \beta$ | $b, \alpha, c$     | 3b, 3a, 1.  |
| 4. | $\alpha, \beta$ | $a, b, c$          | 2, 3b, 1.   |
| 5. | $a, c$          | $\alpha, b, \beta$ | 1a, 3a, 3b. |
| 6. | $\alpha, c$     | $a, b, \beta$      | 1a, 3a, 3b. |



Anm. Es genügen also mit Ausnahme des Falles 4, der in der ebenen Trigonometrie kein Gegenstück hat, die Formeln 1) und 3), also auch die Funktionen  $\sin$  und  $tg$  zur Berechnung des Dreiecks. — Werden die Stücke  $a, b, \alpha, \beta$  aus ihrer Sinusfunktion berechnet, so geht aus dem Satze 331 hervor, ob der spitze oder der stumpfe Winkel zu nehmen ist. Nur im Falle 2 bleibt die Zweideutigkeit bestehen, da weder  $b$  noch  $\beta$  gegeben ist, also beide Stücke entweder als spitze oder als stumpfe Winkel berechnet werden können. Die Entscheidung über die Grösse von  $c$  erfolgt jedesmal durch den Satz 333. — Was findet statt, wenn zwischen den gegebenen Stücken folgende Beziehungen bestehen? 1)  $a > \alpha$ , 2)  $a = \alpha$ , 3)  $a = c = R$ ? — Zurückführung des gleichschenkligen Kugeldreiecks auf das rechtwinklige durch einen den Winkel an der Spitze halbierenden Diametralkreis.

Zu den gesuchten Stücken kann auch die Fläche des Dreiecks gehören. Da sich nun um dieselbe Ecke beliebig viele Kugelflächen beschreiben lassen, aus denen Dreiecke ausgeschnitten werden, welche in den Seiten und Winkeln übereinstimmen, aber verschiedene Grösse (bei gleicher Gestalt) haben, so muss zur Berechnung der Fläche eines Kugeldreiecks noch der Kugelradius  $r$  gegeben sein. Alsdann folgt für das rechtwinklige Kugeldreieck aus 312 die Formel

$$f^2 = \frac{(\alpha + \beta - R)r^2\pi}{2R}.$$

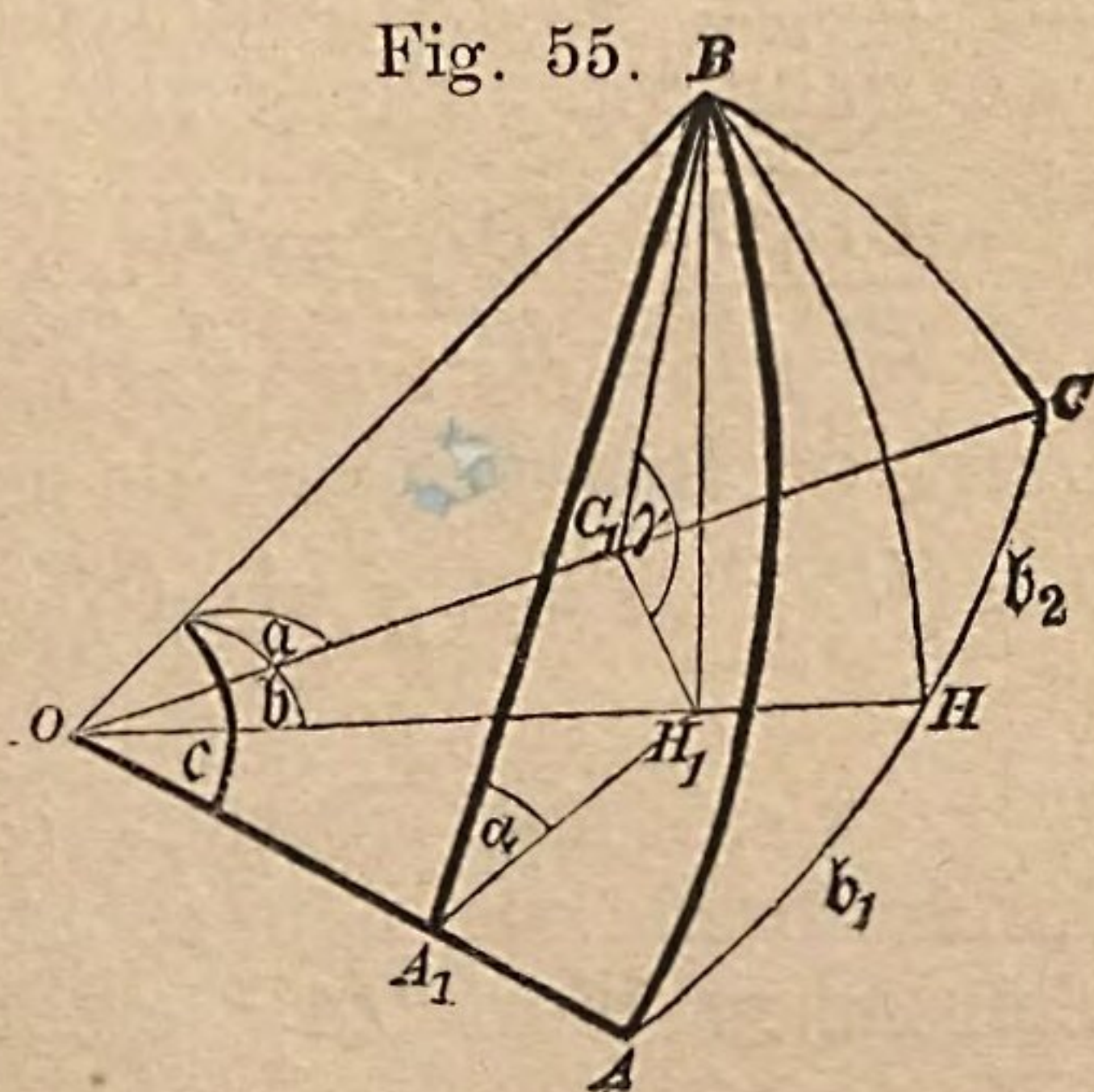
Anm. Sind  $a_1, b_1, c_1$  die Seiten und  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  die Winkel des Polardreiecks, so folgt aus 110, dass  $c_1 = R$  (da  $\gamma + c_1 = 2R$  ist). Im Polardreieck des rechtwinkligen Kugeldreiecks ist also eine Seite gleich  $R$ . Ferner erhält man, wenn man in allen Formeln der Nr. 123 und 124 die griechischen mit den deutschen Buchstaben vertauscht und den  $\cos$ - und  $tg$ -Funktionen entgegengesetztes Vorzeichen giebt, neue Formeln, welche für dieses rechtseitige Polardreieck gelten (T. III, 29).

## II. Das schiefwinklige Kugeldreieck.

### 1. Erste Methode.

#### a. Geometrisches Verfahren.

**125. Der Sinussatz.** — Es seien  $OA, OB, OC$  die Strecken, welche die Ecken eines schiefwinkligen Kugeldreiecks  $\overline{ABC}$  (Fig. 55) mit dem Kugelmittelpunkte verbinden. Legt man dann durch  $OB$  die Ebene  $\overline{OBH}$  senkrecht zu  $OAC$ , so entstehen die beiden bei  $H$  rechtwinkligen Kugeldreiecke  $\overline{BAH}$  und  $\overline{BCH}$ . Wird dann der zu der ge-





meinsamen Seite  $BH$  gehörige Winkel  $BOH$  mit  $h$  bezeichnet, so ist nach 328

$$\sin \alpha = \frac{\sin h}{\sin c}, \quad \sin \gamma = \frac{\sin h}{\sin a},$$

folglich durch Division beider Formeln:

334. (1)  $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\sin a}{\sin c}.$

Ebenso würde man mittelst der durch  $OA$  zu  $\overline{OCB}$  senkrecht gelegten Ebene erhalten:

$$(2) \quad \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin b}.$$

Endlich erhält man durch Multiplikation der Formeln (1) und (2):

$$(3) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin a}{\sin b}.$$

Diese drei Formeln (Sinusformeln) enthalten zusammen den Satz (Sinussatz):

335. Die Sinus der Seiten eines Kugeldreiecks verhalten sich wie die Sinus ihrer Gegenwinkel.

Anm. Ist einer der an  $AC$  anliegenden Winkel, z. B.  $\gamma > R$ , so enthält das Dreieck  $\overline{BHC}$  nicht  $\gamma$ , sondern den Winkel  $(2R - \gamma)$ . Da aber  $\sin(2R - \gamma) = \sin \gamma$  ist, so bleibt der Satz auch für das stumpfwinklige Dreieck in Geltung.

Sind von einem Kugeldreieck die Stücke  $ab\alpha$  oder  $\alpha\beta a$  gegeben, so kann man mittelst der Formeln zu 334  $\beta$  bzw.  $b$  berechnen, nicht aber  $c$  und  $\gamma$ . Der Sinussatz allein reicht also in keinem Falle zur vollständigen Berechnung des Dreiecks aus.

**126. Der Cosinussatz.** — Betrachtet man in Fig. 54 das Kugeldreieck  $\overline{ABC}$  als schiefwinklig, so sind die Winkel  $BC_1O$  und  $BC_1A_1$  nicht mehr rechte, wohl aber  $BA_1O$  und  $C_1A_1O$ .

Dann ist nach T. III, 78 in den schiefwinkligen Dreiecken

$$\overline{BC_1O}: BC_1^2 = OC_1^2 + OB^2 - 2OC_1 \cdot OB \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{BC_1A_1}: BC_1^2 = A_1C_1^2 + A_1B^2 - 2A_1C_1 \cdot A_1B \cdot \cos \alpha.$$

Durch Subtraktion erhält man hieraus

$$0 = (OC_1^2 - A_1C_1^2) + (OB^2 - A_1B^2) - 2OC_1 \cdot OB \cdot \cos \alpha + 2A_1C_1 \cdot A_1B \cdot \cos \alpha,$$

oder, wenn man hieraus  $\cos \alpha$  bestimmt und die Klammern durch ihren aus den rechtwinkligen Dreiecken folgenden gemeinsamen Wert  $OA_1^2$  ersetzt:



$$\cos a = \frac{OA_1^2 + A_1C_1 \cdot A_1B \cdot \cos \alpha}{OC_1 \cdot OB},$$

oder  $\cos a = \frac{OA_1}{OC_1} \cdot \frac{OA_1}{OB} + \frac{A_1C_1}{OC_1} \cdot \frac{A_1B}{OB} \cdot \cos \alpha,$

oder 1)  $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha.$  336.

Zwei weitere Formeln von gleicher Gestalt erhält man hieraus durch Vertauschung der Buchstaben. Alle zusammen enthalten den Satz (Cosinussatz):

Der Cosinus einer Seite des Kugeldreiecks ist 337. gleich dem Produkte der Cosinus der anderen Seiten, vermehrt um das Produkt aus den Sinus dieser Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Anm. Man untersuche die Formel des Cosinussatzes für die Fälle  $\alpha = 0, R, 2R$ .

Sind  $a_1, b_1, c_1$  die Seiten und  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  die Winkel des Polardreiecks, so folgt aus 110, dass

$$\begin{aligned} \cos a &= -\cos \alpha_1, \quad \sin a = \sin \alpha_1, \\ \cos \alpha &= -\cos \alpha_1, \quad \sin \alpha = \sin \alpha_1, \end{aligned}$$

während analoge Formeln für die übrigen Seiten und Winkel gelten. Setzt man diese Werte in 336 ein, und kehrt dann alle Vorzeichen um, so folgt (mit Weglassung der Indices)

2)  $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a,$  338.

nebst zwei entsprechenden, durch Vertauschung der Buchstaben entstehenden Formeln.

Anm. Wie lautet die in den Formeln 2) enthaltene zweite Form des Cosinussatzes?

Die Formeln 1) und 2), jede in dreifacher Gestalt aufgestellt, reichen aus, um in jedem Falle aus drei gegebenen Stücken des Kugeldreiecks die drei übrigen zu berechnen.

Im ganzen kann man folgende sechs Aufgaben stellen:

|    | Gegeben:                  | Gesucht:                  | Formeln:    |
|----|---------------------------|---------------------------|-------------|
| 1. | $a \ b \ c$               | $\alpha \ \beta \ \gamma$ | 1a, 1b, 1c. |
| 2. | $\alpha \ \beta \ \gamma$ | $a \ b \ c$               | 2a, 2b, 2c. |
| 3. | $a \ b \ \gamma$          | $c \ \alpha \ \beta$      | 1c, 1a, 1b. |
| 4. | $\alpha \ \beta \ c$      | $\gamma \ a \ b$          | 2c, 2a, 2b. |
| 5. | $a \ b \ \alpha$          | $c \ \beta \ \gamma$      | 1a, 1b, 1c. |
| 6. | $\alpha \ \beta \ a$      | $\gamma \ b \ c$          | 2a, 2b, 2c. |



Anm. In den Fällen 5 und 6 würden die Formeln 1a und 2a noch einer Umgestaltung bedürfen, da sie  $c$ , bzw.  $\gamma$  in zwei verschiedenen Funktionen enthalten. Diese Umgestaltung, sowie die Untersuchung über die Zahl der Lösungen in den Fällen 5 und 6, wird hier übergangen, da die Formeln des Cosinussatzes im folgenden durch andere, zur Berechnung mehr geeignete, ersetzt werden sollen.

### b. Algebraisches Verfahren.

**127. Gemeinsamer Ursprung des Sinus- und Cosinussatzes.** — Bezeichnet man in dem Kugeldreieck  $\overline{ABC}$  (Fig. 55) die Abschnitte  $AH$  und  $HC$  mit  $b_1$ , bzw.  $b_2$ , die gegenüberliegenden Winkel mit  $\beta_1$  und  $\beta_2$ , so ist zunächst für das rechtwinklige Kugeldreieck  $\overline{ABH}$

$$\sin b_1 = \sin \beta_1 \cdot \sin c \quad (328),$$

$$\cos b_1 = \frac{\cos c}{\cos \alpha} \quad (332),$$

also durch Division:

$$\operatorname{tg} b_1 = \operatorname{tg} c \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta_1,$$

oder, da nach 329  $\cos \alpha \cdot \sin \beta_1 = \cos \alpha$  ist:

$$\operatorname{tg} b_1 = \operatorname{tg} c \cdot \cos \alpha.$$

Ebenso erhält man für das Dreieck  $\overline{CBH}$

$$\operatorname{tg} b_2 = \operatorname{tg} a \cdot \cos \gamma,$$

daher nach T. III. 36

$$\operatorname{tg} (b_1 + b_2) = \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} a \cdot \cos \gamma + \operatorname{tg} c \cdot \cos \alpha}{1 - \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} a \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha},$$

oder

$$1) \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cdot \cos \alpha + \operatorname{tg} a \cdot \cos \gamma + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma.$$

Hieraus gehen durch Vertauschung der Buchstaben noch zwei andere Gleichungen hervor. Aus diesen drei Gleichungen lassen sich durch Elimination die Formeln des Sinussatzes und des Cosinussatzes ableiten. — Dividirt man 1) durch  $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c$ , so folgt:

$$(\cot a \cdot \cot c) = \cos \alpha \cdot (\cot a \cdot \cot b) + \cos \gamma (\cot b \cdot \cot c) + \cos \alpha \cdot \cos \gamma,$$

oder, wenn man

$$2) \quad \begin{cases} \cot b \cdot \cot c = x, & \cot c \cdot \cot a = y, & \cot a \cdot \cot b = z, \\ \cos \alpha = a, & \cos \beta = b, & \cos \gamma = c \end{cases}$$

setzt, und zur Herstellung einer zweiten und einer dritten Gleichung die Buchstaben vertauscht:



$$3) \quad \begin{cases} y = az + cx + ac, \\ z = bx + ay + ba, \\ x = cy + bz + cb. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$x = \frac{(b + ca)(c + ab)}{1 - 2abc - a^2 - b^2 - c^2},$$

oder, wenn man

$$4) \quad \begin{cases} a + bc = a_1, & b + ca = b_1, & c + ab = c_1, \\ 1 - 2abc - a^2 - b^2 - c^2 = d^2 *) \end{cases}$$

setzt, und, um  $y$  und  $z$  zu finden, die Buchstaben vertauscht:

$$5) \quad x = \frac{b_1 c_1}{d^2}, \quad y = \frac{c_1 a_1}{d^2}, \quad z = \frac{a_1 b_1}{d^2}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$\frac{xy}{z} = \frac{b_1 c_1^2 a_1 d^2}{a_1 b_1 d^4} = \frac{c_1^2}{d^2},$$

oder, wenn man  $x, y, z$  durch die Werte 2) ersetzt:

$$6) \quad \cot^2 c = \frac{c_1^2}{d^2}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$7) \quad \sin^2 c = \frac{d^2}{c_1^2 + d^2}; \quad \sin^2 a = \frac{d^2}{a_1^2 + d^2}; \quad \sin^2 b = \frac{d^2}{b_1^2 + d^2};$$

$$8) \quad \cos^2 c = \frac{c_1^2}{c_1^2 + d^2}; \quad \cos^2 a = \frac{a_1^2}{a_1^2 + d^2}; \quad \cos^2 b = \frac{b_1^2}{b_1^2 + d^2}.$$

Nun ist nach 4)

$$\begin{aligned} c_1^2 + d^2 &= c^2 + 2abc + a^2 b^2 + 1 - 2abc - a^2 - b^2 - c^2 \\ &= 1 - a^2 - b^2 + a^2 b^2 = (1 - a^2)(1 - b^2); \end{aligned}$$

also nach 2)

$$9) \quad c_1^2 + d^2 = \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta; \quad a_1^2 + d^2 = \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma; \quad b_1^2 + d^2 = \sin^2 \gamma \cdot \sin^2 \alpha.$$

Durch Einsetzung dieser Werte in 7) und Elimination von  $d^2$  folgt:

$$\sin^2 c \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta = \sin^2 a \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma = \sin^2 b \cdot \sin^2 \gamma \cdot \sin^2 \alpha (= d^2),$$

daher durch Radizierung (wobei überall die positiven Zeichen zu nehmen sind, weil alle Winkel konkav sind):

\*) Dass  $1 - 2abc - a^2 - b^2 - c^2$  positiv ist, also dem Quadrate einer reellen Zahl gleichgesetzt werden kann, folgt aus 6).



$\sin c \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta = \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = \sin b \cdot \sin \gamma \cdot \sin \alpha (= d)$ ,  
oder, indem man durch  $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$  dividiert:

$$10) \quad \frac{\sin c}{\sin \gamma} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} \left( = \frac{d}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \right),$$

wodurch die Formeln des Sinussatzes hergestellt sind.

Anm. Die Grösse  $\frac{d}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$  heisst der Modulus des Dreiecks und entspricht der Grösse  $2r$  in der ebenen Trigonometrie.

Setzt man andererseits die Werte 9) in 8) ein, so folgt mit Berücksichtigung von 4)

$$\cos^2 c = \frac{(c + ab)^2}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}; \quad \cos c = \frac{c + ab}{\sin \alpha \sin \beta},$$

oder mit Rücksicht auf 2)

$$11) \quad \cos c = \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

nebst zwei entsprechenden Formeln für  $\cos a$  und  $\cos b$ . Alle drei stimmen mit den zweiten Formeln des Cosinussatzes (338) überein.

Anm. Das in dieser Nr. auseinandergesetzte algebraische Verfahren zur Ableitung des Sinus- und des Cosinussatzes entspricht genau dem in der ebenen Trigonometrie (T. III, Nr. 49) beschriebenen. Und die Formel 1) oben geht in die Formel 2) jener Nr. über, wenn die Kugelfläche in eine Ebene übergeht, da alsdann, wie oben gefunden,  $tg b$  durch  $b$ ,  $tg a$  durch  $a$ ,  $tg c$  durch  $c$  zu ersetzen ist, während das Produkt  $tg a \cdot tg b \cdot tg c$  gegenüber jedem einzelnen seiner Faktoren verschwindet.

## 2. Zweite Methode.

**128. Vorbemerkung.** — Während die Formeln des Cosinussatzes, wie oben gezeigt, zur Berechnung des Kugeldreiecks in allen sechs Fällen ausreichen, sind sie andererseits zur logarithmischen Berechnung ungeeignet, und sollen daher im folgenden diesem Zwecke gemäss auf doppelte Weise umgeformt werden.

**129. Die Cosinusformeln.** \*) — Durch Addition der Formeln (336)

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \\ \cos b &= \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

---

\*) Diese Formeln werden gewöhnlich Nepersche Analogieen genannt.



folgt

$(\cos a + \cos b)(1 - \cos c) = \sin c (\sin b \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos b)$ ,  
oder nach T. III 46, 43, 40, wenn

$$(1) \quad \frac{a+b}{2} = f, \quad \frac{a-b}{2} = d; \quad \frac{\alpha+\beta}{2} = \sigma, \quad \frac{\alpha-\beta}{2} = \delta$$

gesetzt wird:

$$2 \cos f \cdot \cos d \cdot 2 \sin^2 \frac{c}{2} = 2 \sin \frac{c}{2} \cdot \cos \frac{c}{2} (\sin b \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos b),$$

oder durch Division mit  $2 \cdot \sin \frac{c}{2} \cdot \cos \frac{c}{2}$ :

$$2 \cos f \cdot \cos d \cdot \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \sin b \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos b.$$

Ersetzt man hierin  $\sin b$  durch seinen Wert  $\frac{\sin a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$  (334, 3),  
so folgt:

$$2 \cos f \cdot \cos d \cdot \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\sin a}{\sin \alpha} (\sin \beta \cos a + \sin \alpha \cos \beta),$$

oder

$$(2) \quad 2 \cos f \cdot \cos d \cdot \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\sin a}{\sin \alpha} \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin a}{\sin \alpha} \cdot 2 \sin \sigma \cdot \cos \sigma.$$

Nun folgt aus 334, 3):

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin a \pm \sin b}{\sin \alpha \pm \sin \beta};$$

also für das obere Zeichen:

$$(3a) \quad \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin f \cdot \cos d}{2 \sin \sigma \cdot \cos \delta},$$

für das untere:

$$(3b) \quad \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos f \cdot \sin d}{2 \cos \sigma \cdot \sin \delta}.$$

Setzt man 3a) in 2) ein, so folgt:

$$2 \cos f \cdot \cos d \cdot \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\sin f \cdot \cos d}{\sin \sigma \cdot \cos \delta} \cdot 2 \sin \sigma \cdot \cos \sigma,$$

oder, indem man beiderseits durch  $2 \cos f \cdot \cos d$  dividiert:

$$(4a) \quad \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} f \cdot \frac{\cos \sigma}{\cos \delta}. \quad 339.$$

Setzt man dagegen 3b) in 2) ein, so folgt:



$$2 \cos f \cdot \cos d \cdot \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\cos f \cdot \sin d}{\cos \sigma \cdot \sin \delta} \cdot 2 \sin \sigma \cdot \cos \sigma,$$

oder, indem man beiderseits durch  $2 \cos f \cdot \cos d$  dividiert:

$$340. (4b) \quad \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} d \cdot \frac{\sin \sigma}{\sin \delta}.$$

Aus 110 folgt:

$$\frac{c}{2} + \frac{\gamma_1}{2} = R, \quad f + \sigma_1 = 2R, \quad d = -\delta_1, \\ \sigma + f_1 = 2R, \quad \delta = -d_1,$$

wobei

$$f_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \quad d_1 = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}, \quad \sigma_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \quad \delta_1 = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}$$

gesetzt ist.

Daher ist

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \cot \frac{\gamma_1}{2}, \quad \operatorname{tg} f = -\operatorname{tg} \sigma_1, \quad \cos \sigma = -\cos f_1, \quad \cos \delta = \cos d_1, \\ \operatorname{tg} d = -\operatorname{tg} \delta_1, \quad \sin \sigma = \sin f_1, \quad \sin \delta = -\sin d_1.$$

Setzt man diese Werte in 4a) und 4b) ein, so erhält man nach Weglassung der Indices:

$$(5) \quad \cot \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \sigma \cdot \frac{\cos f}{\cos d}; \quad \cot \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \delta \cdot \frac{\sin f}{\sin d}.$$

Anm. Setzt man die beiden Werte von  $\operatorname{tg} \frac{c}{2}$  in 4a) und 4b), oder die beiden Werte von  $\cot \frac{\gamma}{2}$  in 5) einander gleich, so folgt

$$\frac{\operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg} \delta} = \frac{\operatorname{tg} f}{\operatorname{tg} d},$$

eine Formel, welche dem Tangentialsatze der ebenen Trigonometrie entspricht, und in denselben übergeht, wenn die Kugelfläche in eine Ebene übergeht.

**130. Anwendung der Sinus- und Cosinusformeln.** — Dieselben dienen zur Lösung der Aufgaben  $ab\alpha$ ,  $\alpha\beta a$ ,  $ab\gamma$ ,  $\alpha\beta c$ .

Aufgabe 1. — Ein Kugeldreieck zu berechnen aus zwei Seiten und einem nicht eingeschlossenen Winkel. ( $ab\alpha$ )

$$\text{Lösung: 1) } \sin \beta = \frac{\sin b \cdot \sin \alpha}{\sin a};$$

$$2) \quad \sigma = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \delta = \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad f = \frac{a + b}{2}, \quad d = \frac{a - b}{2};$$

$$3) \quad \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} d \cdot \frac{\sin \sigma}{\sin \delta}; \quad 4) \quad \cot \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \delta \cdot \frac{\sin f}{\sin d}.$$



Anm. Da die Bedingungen für die Anzahl der Lösungen beim Kugeldreieck dieselben sind wie bei der zugehörigen Ecke, so ist nach 106 und den diesem Satze vorangehenden Bemerkungen die Zahl der Lösungen gleich

$$0 \text{ oder } 2, \text{ wenn } a > b \text{ und } a + b > 2R,$$

$$1, \begin{cases} \text{„ } a > b \text{ „ } a + b < 2R, \\ \text{„ } a < b \text{ „ } a + b > 2R, \end{cases}$$

$$0 \text{ oder } 2, \text{ „ } a < b \text{ „ } a + b < 2R.$$

Die Bedingung für eine Lösung kann auch so ausgedrückt werden, dass  $a$  zwischen  $b$  und  $2R - b$  liegen muss. — Ob 0 oder 2 Lösungen vorhanden sind, hängt davon ab, ob  $\sin \beta >$  oder  $< 1$  gefunden wird.

Aufgabe 2. — Ein Kugeldreieck zu berechnen aus einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel. ( $\alpha\beta a$ )

Lösung: 1)  $\sin b = \frac{\sin \beta \cdot \sin a}{\sin \alpha};$

$$2) f = \frac{a + b}{2}, d = \frac{a - b}{2}, \sigma = \frac{\alpha + \beta}{2}, \delta = \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$3) \cot \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \delta \cdot \frac{\sin f}{\sin d}; \quad 4) \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} d \cdot \frac{\sin \sigma}{\sin \delta}.$$

Anm. Die Bedingungen für die Anzahl der Lösungen gehen aus der vorigen Anm. hervor, wenn man darin die griechischen und deutschen Buchstaben vertauscht.

Aufgabe 3. — Ein Kugeldreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. ( $ab\gamma$ )

Lösung: 1)  $f = \frac{a + b}{2}, d = \frac{a - b}{2};$

$$2) \operatorname{tg} \sigma = \cot \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\cos d}{\cos f}; \quad \operatorname{tg} \delta = \cot \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\sin d}{\sin f};$$

$$3) \alpha = \sigma + \delta, \beta = \sigma - \delta; \quad 4) \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} d \cdot \frac{\sin \sigma}{\sin \delta}.$$

Aufgabe 4. — Ein Kugeldreieck zu berechnen aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln. ( $\alpha\beta c$ )

Lösung: 1)  $\sigma = \frac{\alpha + \beta}{2}, \delta = \frac{\alpha - \beta}{2};$

$$2) \operatorname{tg} f = \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cdot \frac{\cos \delta}{\cos \sigma}; \quad \operatorname{tg} d = \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cdot \frac{\sin \delta}{\sin \sigma};$$

$$3) a = f + d, b = f - d; \quad 4) \cot \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \delta \cdot \frac{\sin f}{\sin d}.$$



**131. Die Tangensformeln.** — Aus der Formel des Cosinus-satzes

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$$

folgt 
$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}.$$

Addiert man diese Formel zu  $1 = 1$ , so folgt:

$$\begin{aligned} 1 + \cos \alpha &= \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c}{\sin b \cdot \sin c} \\ &= \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{2 \cdot \sin \frac{1}{2}(b+c+a) \cdot \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \cdot \sin c}, \end{aligned}$$

oder, wenn man

(1)  $a+b+c=2p$ ,  $b+c-a=2p_1$ ,  $c+a-b=2p_2$ ,  $a+b-c=2p_3$  setzt:

$$1 + \cos \alpha = \frac{2 \cdot \sin p \cdot \sin p_1}{\sin b \cdot \sin c},$$

daher

$$341. \quad (2) \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\sin p \cdot \sin p_1}{\sin b \cdot \sin c}}.$$

Subtrahiert man die Formel für  $\cos \alpha$  von  $1 = 1$ , so folgt:

$$\begin{aligned} 1 - \cos \alpha &= \frac{\sin b \cdot \sin c + \cos b \cdot \cos c - \cos a}{\sin b \cdot \sin c} \\ &= \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{2 \cdot \sin \frac{1}{2}(a+b-c) \cdot \sin \frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b \cdot \sin c} \\ &= \frac{2 \cdot \sin p_2 \cdot \sin p_3}{\sin b \cdot \sin c}, \end{aligned}$$

daher

$$342. \quad (3) \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\sin p_2 \cdot \sin p_3}{\sin b \cdot \sin c}}.$$

Dividiert man 342 durch 341, so folgt:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin p_2 \sin p_3}{\sin p \cdot \sin p_1}} = \sqrt{\frac{\sin p_1 \sin p_2 \sin p_3}{\sin p \cdot \sin^2 p_1}},$$

oder, wenn

$$343. \quad (4) \quad \sqrt{\frac{\sin p_1 \sin p_2 \sin p_3}{\sin p}} = \sin r$$

gesetzt wird:

$$344. \quad (5) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin r}{\sin p_1}, \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sin r}{\sin p_2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin r}{\sin p_3}.$$



Anm. Die Formeln 341—343 gehen, wenn das Kugeldreieck ein ebenes wird, in die Formeln T. III, 82—84 über. — Da in jeder konkaven Ecke, also auch in jedem Kugeldreieck, welches nur konkave Winkel enthält,  $\alpha + \beta + \gamma < 4R$  (122), so ist  $p$  und umsomehr  $p_1, p_2, p_3 < 2R$ , also sind in den Formeln (2) bis (5) sämtliche Sinus positiv, daher sämtliche Wurzeln reell.

Setzt man

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 2\pi', \quad \beta_1 + \gamma_1 - \alpha_1 = 2\pi_1', \quad \gamma_1 + \alpha_1 - \beta_1 = 2\pi_2', \\ \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 = 2\pi_3',$$

so folgt aus 110, dass

$$p + \pi' = 3R, \quad p_1 + \pi_1' = R, \quad p_2 + \pi_2' = R, \quad p_3 + \pi_3' = R.$$

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha_1}{2} = R, \quad \frac{\beta}{2} + \frac{\beta_1}{2} = R, \quad \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma_1}{2} = R.$$

Hieraus folgt weiter, dass

$$\sin p = -\cos \pi', \quad \sin p_1 = \cos \pi_1', \quad \sin p_2 = \cos \pi_2', \quad \sin p_3 = \cos \pi_3',$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\alpha_1}{2}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha_1}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \cot \frac{\alpha_1}{2}.$$

Setzt man diese Werte in die Formeln (1) bis (5) ein, so erhält man nach Weglassung der oberen Indices:

$$(6) \quad \alpha + \beta + \gamma = 2\pi, \quad \beta + \gamma - \alpha = 2\pi_1, \quad \gamma + \alpha - \beta = 2\pi_2, \quad \alpha + \beta - \gamma = 2\pi_3. \quad (1)$$

$$(7) \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \pi \cdot \cos \pi_1}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}}; \quad (2) \quad 345.$$

$$(8) \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos \pi_2 \cdot \cos \pi_3}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}}; \quad (3) \quad 346.$$

$$(9) \quad \sqrt{\frac{\cos \pi_1 \cos \pi_2 \cos \pi_3}{-\cos \pi}} = \cos \varrho^*) \quad 347.$$

$$(10) \quad \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \varrho}{\cos \pi_1}, \quad \cot \frac{\beta}{2} = \frac{\cos \varrho}{\cos \pi_2}, \quad \cot \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos \varrho}{\cos \pi_3}. \quad 348.$$

Anm. Da nach 123  $\alpha + \beta + \gamma > 2R$  und  $< 6R$ , so ist  $\pi > R$  und  $< 3R$ , also  $\cos \pi$  negativ und  $-\cos \pi$  positiv. Da ferner  $\beta_1 + \gamma_1 > \alpha_1$  (118), so ist  $2R - \beta + 2R - \gamma > 2R - \alpha$  oder  $\beta + \gamma - \alpha < 2R$ , d. h.  $\pi_1 < R$ , ebenso  $\pi_2$  und  $\pi_3$ ; also sind in den Formeln (7) bis (10) alle Cosinus, mit Ausnahme von  $\cos \pi$ , positiv, ebenso die Sinus, daher sämtliche Wurzeln reell.

\*) Diese Formel enthält natürlich keine Folgerung aus (4), sondern ebenso, wie letztere Formel, eine willkürliche zur Abkürzung getroffene Bestimmung.



**132. Anwendung der Tangensformeln.** — Dieselben dienen zur Lösung der Aufgaben  $abc$  und  $\alpha\beta\gamma$ .

Aufgabe 5. — Ein Kugeldreieck zu berechnen aus den drei Seiten. ( $abc$ )

Lösung: 1)  $p = \frac{a+b+c}{2}$ ,  $p_1 = p - a$ ,  $p_2 = p - b$ ,  $p_3 = p - c$ .

$$2) \sin r = \sqrt{\frac{\sin p_1 \sin p_2 \sin p_3}{\sin p}},$$

$$3) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin r}{\sin p_1}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sin r}{\sin p_2}, \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin r}{\sin p_3}.$$

Aufgabe 6. — Ein Kugeldreieck zu berechnen aus den drei Winkeln. ( $\alpha\beta\gamma$ )

Lösung: 1)  $\pi = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ ,  $\pi_1 = \pi - \alpha$ ,  $\pi_2 = \pi - \beta$ ,  $\pi_3 = \pi - \gamma$ .

$$2) \cos \varrho = \sqrt{\frac{\cos \pi_1 \cos \pi_2 \cos \pi_3}{-\cos \pi}},$$

$$3) \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \varrho}{\cos \pi_1}, \cot \frac{\beta}{2} = \frac{\cos \varrho}{\cos \pi_2}, \cot \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos \varrho}{\cos \pi_3}.$$

### 3. Dritte Methode.

**133. Methode des Hilfswinkels.** — Die Formel des Cosinussatzes kann für die einzelnen Aufgaben statt durch Umformung auch durch Einführung eines Hilfswinkels vereinfacht werden.

Aufgabe 1. — Gegeben  $ab\alpha$ .

Multipliziert man die Formel 336 mit  $\cos c$ , so folgt:

$$\cos a \cdot \cos c = \cos b \cdot \cos^2 c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos \alpha.$$

Ferner folgt aus 336 durch Buchstabenvertauschung

$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos \beta.$$

Durch Addition beider Formeln erhält man

$$\cos b = \cos b \cdot \cos^2 c + \sin c (\sin b \cdot \cos c \cdot \cos \alpha + \sin a \cdot \cos \beta)$$

oder, wenn man das erste Glied rechts nach links schafft und durch  $\sin c$  hebt:

$$\cos b \cdot \sin c = \sin b \cdot \cos c \cdot \cos \alpha + \sin a \cdot \cos \beta.$$

Setzt man endlich den aus dem Sinussatze folgenden Wert

$$\sin a = \frac{\sin b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$$



in diese Formel ein und dividiert durch  $\sin b$ , so erhält man

$$\cot b \cdot \sin c = \cos c \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cot \beta,$$

oder durch Buchstabenvertauschung

$$(a) \quad \cot \alpha \cdot \sin b = \cos b \cdot \cos \gamma + \sin \gamma \cdot \cot \alpha. \quad 349.$$

Von dieser Formel geht man aus, um die oben gestellte Aufgabe zu lösen. Setzt man

$$(b) \quad \cot \alpha = \cos b \cdot \cot \varphi,$$

so geht die letzte Formel über in

$$\cot \alpha \cdot \sin b = \cos b (\cos \gamma + \sin \gamma \cdot \cot \varphi),$$

oder, indem man beiderseits mit  $\frac{\sin \varphi}{\cos b}$  multipliziert:

$$(c) \quad \cot \alpha \cdot \operatorname{tg} b \cdot \sin \varphi = \sin (\gamma + \varphi).$$

Da man, wenn  $a, b, \alpha$  gegeben sind, aus (b) den Winkel  $\varphi$ , und aus (c) den Winkel  $\gamma$  findet, so folgt für Aufgabe 1 die

Lösung: 1)  $\operatorname{tg} \varphi = \cos b \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ; 2)  $\sin (\gamma + \varphi) = \frac{\sin \varphi \cdot \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} \alpha}$ ;

$$3) \sin \beta = \frac{\sin b \cdot \sin \alpha}{\sin a}; \quad 4) \sin c = \frac{\sin \gamma \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha}.$$

Aufgabe 2. — Gegeben  $\alpha \beta a$ .

Aus der Formel (a) folgt mittelst 110:

$$- \cot \alpha \cdot \sin \beta = \cos \beta \cdot \cos c - \sin c \cdot \cot \alpha,$$

oder

$$(a_1) \quad \cot \alpha \cdot \sin \beta = - \cos \beta \cdot \cos c + \sin c \cdot \cot \alpha.$$

Setzt man

$$(b_1) \quad \cot \alpha = \cos \beta \cdot \cot \varphi,$$

so geht die letzte Formel über in

$$\cot \alpha \cdot \sin \beta = \cos \beta (- \cos c + \sin c \cdot \cot \varphi),$$

oder, indem man beiderseits mit  $\frac{\sin \varphi}{\cos \beta}$  multipliziert:

$$(c_1) \quad \cot \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \varphi = \sin (c - \varphi).$$

Da man, wenn  $\alpha, \beta, a$  gegeben sind, aus (b<sub>1</sub>) den Winkel  $\varphi$ , und aus (c<sub>1</sub>) den Winkel  $c$  findet, so folgt für Aufgabe 2 die

Lösung: 1)  $\operatorname{tg} \varphi = \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ; 2)  $\sin (c - \varphi) = \frac{\sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$ ;

$$3) \sin b = \frac{\sin \beta \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha}; \quad 4) \sin \gamma = \frac{\sin c \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha}.$$



Aufgabe 3. — Gegeben  $b, c, \alpha$ .

Wenn man in der Formel 336

$$(a) \cos \alpha = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$$

die Substitution macht:

$$(b) \cos \alpha = \cot b \cdot \cot \varphi,$$

so erhält man

$$\cos \alpha = \cos b (\cos c + \sin c \cdot \cot \varphi),$$

oder (c) 
$$\cos \alpha = \frac{\cos b \cdot \sin (c + \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Da man, wenn  $b, c, \alpha$  gegeben sind, aus (b) den Winkel  $\varphi$ , und aus (c) die Seite  $a$  findet, so folgt für Aufgabe 3 die

Lösung: 1)  $\cot \varphi = \operatorname{tg} b \cdot \cos \alpha$ ; 2)  $\cos \alpha = \frac{\cos b \cdot \sin (c + \varphi)}{\sin \varphi};$

$$3) \sin \beta = \frac{\sin b \cdot \sin \alpha}{\sin a}; \quad 4) \sin \gamma = \frac{\sin c \cdot \sin \alpha}{\sin a}.$$

Aufgabe 4. — Gegeben  $\beta, \gamma, \alpha$ .

Wenn man in der Formel 338

$$(a_1) \cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos \alpha$$

die Substitution macht:

$$(b_1) \cos \alpha = \cot \beta \cdot \cot \varphi,$$

so erhält man

$$\cos \alpha = \cos \beta (-\cos \gamma + \sin \gamma \cdot \cot \varphi),$$

oder

$$(c_1) \cos \alpha = \frac{\cos \beta \cdot \sin (\gamma - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Da man, wenn  $\beta, \gamma, \alpha$  gegeben sind, aus (b<sub>1</sub>) den Winkel  $\varphi$ , und aus (c<sub>1</sub>) den Winkel  $\alpha$  findet, so folgt für Aufgabe 4 die

Lösung: 1)  $\cot \varphi = \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \alpha$ ; 2)  $\cos \alpha = \frac{\cos \beta \cdot \sin (\gamma - \varphi)}{\sin \varphi};$

$$3) \sin b = \frac{\sin \beta \cdot \sin \alpha}{\sin a}; \quad 4) \sin c = \frac{\sin \gamma \cdot \sin \alpha}{\sin a}.$$

Aufgabe 5. — Gegeben  $a, b, c$ .

Aus 336 folgt

$$(a) \cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}.$$

Setzt man hierin

$$(b) \cos \alpha = \cos c \cdot \sin b \cdot \cot \varphi,$$



so erhält man

$$\cos \alpha = \frac{\cos c (\sin b \cdot \cot \varphi - \cos b)}{\sin b \cdot \sin c},$$

oder (c)  $\cos \alpha = \frac{\cot c \cdot \sin (b - \varphi)}{\sin b \cdot \sin \varphi}.$

Da man, wenn  $\alpha, b, c$  gegeben sind, aus (b) den Winkel  $\varphi$ , und aus (c) den Winkel  $\alpha$  findet, so folgt für Aufgabe 5 die

Lösung: 1)  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin b \cdot \cos c}{\cos \alpha}$ ; 2)  $\cos \alpha = \frac{\cot c \cdot \sin (b - \varphi)}{\sin b \cdot \sin \varphi}$ ;

3)  $\sin \beta = \frac{\sin b \cdot \sin \alpha}{\sin a}$ ; 4)  $\sin \gamma = \frac{\sin c \cdot \sin \alpha}{\sin a}.$

Aufgabe 6. — Gegeben  $\alpha\beta\gamma$ .

Aus 338 folgt

$$(a_1) \quad \cos \alpha = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}.$$

Setzt man hierin

$$(b_1) \quad \cos \alpha = \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \cot \varphi,$$

so erhält man

$$\cos \alpha = \frac{\cos \gamma (\sin \beta \cdot \cot \varphi + \cos \beta)}{\sin \beta \cdot \sin \gamma},$$

oder (c<sub>1</sub>)  $\cos \alpha = \frac{\cot \gamma \cdot \sin (\beta + \varphi)}{\sin \beta \cdot \sin \varphi}.$

Da man, wenn  $\alpha, \beta, \gamma$  gegeben sind, aus (b<sub>1</sub>) den Winkel  $\varphi$ , und aus (c<sub>1</sub>) die Seite  $a$  findet, so folgt für Aufgabe 6 die

Lösung: 1)  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \beta \cdot \cos \gamma}{\cos \alpha}$ ; 2)  $\cos \alpha = \frac{\cot \gamma \cdot \sin (\beta + \varphi)}{\sin \beta \cdot \sin \varphi}$ ;

3)  $\sin b = \frac{\sin \beta \cdot \sin \alpha}{\sin a}$ ; 4)  $\sin c = \frac{\sin \gamma \cdot \sin \alpha}{\sin a}.$

Die Fläche des Kugeldreiecks wird durch Formel 312 gefunden.



# Anhang.

## Die Flächen zweiter Ordnung.\*)

**134. Vorbemerkung.** — In der elementaren Stereometrie betrachtet man nur diejenigen Flächen, welche durch eine einfache Bewegung aus einer Geraden oder Kreislinie entstehen, nämlich die Ebene, die gemeine Kegel-, Cylinder- und die Kugelfläche. Zwar ist die Bewegung der Geraden, welche die Kegel- oder Cylinderfläche beschreibt, eine zusammengesetzte, aber die Ebene, in welcher diese Gerade liegt, führt durch ihre Drehung eine einfache Bewegung aus.

Alle anderen Flächen entstehen entweder durch einfache Bewegung einer nicht elementaren Kurve, oder durch zusammengesetzte Bewegung einer Geraden oder Kreislinie, oder sie lassen sich überhaupt nicht durch Bewegung von Linien mit unveränderlicher Gestalt erzeugen, sondern erscheinen als geometrische Oerter von Punkten, die sich nach einem bestimmten Gesetz im Raume bewegen. (Letztere Auffassung lässt sich auf alle Flächen ohne Ausnahme anwenden.) Von dem Gesetze dieser Bewegung sei hier nur bemerkt, dass es sich durch eine Gleichung mit 3 Unbekannten (Veränderlichen) ausdrücken lässt, und dass die Fläche algebraisch oder transcendent genannt wird, je nachdem diese Gleichung algebraisch oder transcendent ist. — Zwei derartige Gleichungen mit denselben veränderlichen Grössen stellen alle diejenigen Punkte dar, welche beiden Flächen gemeinsam sind, d. h. die Schnittlinie der beiden Flächen, drei solcher Gleichungen stellen die einzelnen den drei Flächen gemeinsamen Punkte dar. — Man teilt die algebraischen Flächen ein nach dem Grade der Kurve, in welcher sie von einer Ebene geschnitten werden (oder nach der Klasse der Kurve, in welcher alle aus einem Punkte an

---

\*) Vgl. T. II, Nr. 165.



sie gelegten Tangentenebenen sie berühren), und sagt, eine Fläche sei von der  $n^{\text{ten}}$  Ordnung, wenn sie von einer Ebene in einer Kurve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung geschnitten werden kann (von der  $n^{\text{ten}}$  Klasse, wenn die Berührungspunkte aller durch einen Punkt an sie gelegten Tangentenebenen auf einer Kurve  $n^{\text{ter}}$  Klasse liegen). Hiernach ist die Ebene eine Fläche  $1^{\text{ter}}$  Ordnung (der Punkt, als Grenzfall der Kugelfläche betrachtet, eine Fläche  $1^{\text{ter}}$  Klasse), die elementaren krummen Flächen sind Flächen  $2^{\text{ter}}$  Ordnung und  $2^{\text{ter}}$  Klasse.

Anm. Die gemeine Cylinderfläche wird von einer Ebene entweder in einer Kreislinie, oder in einer Ellipse, oder in zwei parallelen Geraden (specieller Fall der Ellipse nach T. II, Nr. 171) geschnitten. Die Berührungspunkte der beiden aus einem Punkte an sie gelegten Tangentenebenen liegen auf zwei parallelen Geraden. — Die (vollständige) gemeine Kegelfläche wird von einer Ebene entweder in einer Kreislinie, oder in einer Ellipse, Parabel, Hyperbel, oder in einem Punkte (specieller Fall der Kreislinie) geschnitten. Die Berührungspunkte der beiden aus einem Punkte an sie gelegten Tangentenebenen liegen auf zwei sich schneidenden Geraden (specieller Fall der Hyperbel nach T. II, Nr. 176). — Die Kugelfläche wird von jeder Ebene in einer Kreislinie geschnitten. Die Berührungspunkte aller aus einem Punkte an sie gelegten Tangentenebenen liegen auf einer Kreislinie.

Es sollen nun im folgenden die übrigen Flächen zweiter Ordnung betrachtet werden.

**135. Entstehungsweisen der Flächen zweiter Ordnung.** — 1) Wenn eine Kurve zweiter Ordnung eine halbe Umdrehung um eine ihrer Axen macht, so kommen ihre beiden zur Axe symmetrisch liegenden Hälften zur Deckung, und es entsteht eine specielle Form der Flächen zweiter Ordnung, eine Rotationsfläche. Diese Fläche wird durch jede von zwei auf einander senkrecht stehenden, durch die Axe gelegten Ebenen (a und b) in der ursprünglich gegebenen Kurve geschnitten, von einer zur Axe senkrechten Ebene (c) in einer Kreislinie. Denkt man sich nun die Rotationsfläche durch Biegung so verändert, dass aus dieser Kreislinie eine Ellipse wird, so erhält man die allgemeine Form einer Fläche zweiter Ordnung. Sind die Schnittlinien (ac) und (bc) die Axen dieser Ellipse, so werden (ac), (bc) und (ab) die Axen, und die Ebenen a, b, c die Hauptschnitte der Fläche genannt. — Die Flächen selbst können elliptische Flächen genannt werden.

2) Auf die eben beschriebene Art können offenbar nur solche Flächen entstehen, welche von irgend einer Ebene in einer Ellipse geschnitten werden. Eine andere Art von Flächen zweiter Ordnung entsteht durch einfache Verschiebung einer



Kurve zweiter Ordnung im Raume. Alle zur Ebene der Kurve parallelen Ebenen schneiden dann die Fläche in Kurven, welche der gegebenen kongruent sind, alle zur Ebene der Kurve senkrechten Ebenen schneiden die Fläche in einem Parallelenpaar. — Durch jeden Punkt der Fläche geht eine Gerade (Seitenlinie). Diese Flächen können cylindrische Flächen genannt werden.

3) Es ist schliesslich noch der Fall denkbar, dass eine Fläche zweiten Grades von einer Ebene weder in einer Ellipse noch in einem Parallelenpaar (welches als Ausartung der Ellipse angesehen werden kann) geschnitten werden kann, sondern nur in Parabeln und Hyperbeln (bezw. zwei sich schneidenden Geraden als Ausartung der Hyperbel). Eine solche Fläche entsteht (Fig. 60), wenn eine Gerade  $x$  sich im Raume so bewegt, dass ihre Schnittpunkte mit zwei windschiefen Geraden  $a$  und  $b$  von zwei Punkten  $A$  und  $B$  der Geraden  $a$  und  $b$  beständig gleichen Abstand haben. Sind also  $A_1, A_2, \dots$  die Punkte, in welchen  $a$ , ferner  $B_1, B_2, \dots$  die Punkte, in welchen  $b$  von  $x$  geschnitten wird, und  $A_1B_1, A_2B_2, \dots$  verschiedene Lagen von  $x$ , so ist  $A_1A = B_1B, A_2A = B_2B, \dots$ . Ebenso wie die Gerade  $x$  müssen auch ihre Schnittpunkte mit  $a$  und  $b$  beständig auf der von  $x$  beschriebenen Fläche liegen; d. h.  $a$  und  $b$  liegen selbst auf der Fläche. Jede durch  $a$  (oder  $b$ ) und  $x$  (in irgend einer Lage dieser Geraden) gelegte Ebene schneidet die Fläche in dem Geradenpaare  $ax$ . Die Fläche ist also eine Fläche zweiter Ordnung. Jede andere durch eine Gerade  $x$  gelegte Ebene schneidet daher die Fläche noch in einer zweiten Geraden  $y$ . Diese Geraden  $y$  bilden daher ein zweites System von Geraden, die auf der Fläche liegen. Da man zu jeder Ebene des Raumes zwischen zwei windschiefen Geraden beliebige Parallelen ziehen kann,\*) so hat jede Ebene des Raumes wenigstens mit einer der auf der Fläche liegenden Geraden einen unendlich fernen Punkt gemeinsam, schneidet also die Fläche in einer Kurve, die wenigstens einen unendlich fernen Punkt hat, also keine Ellipse sein kann, sondern nur eine Hyperbel oder Parabel. — Die so bestimmte Fläche kann windschiefe Fläche genannt werden.

Anm. Die hier angegebenen Entstehungsweisen umfassen sämtliche Flächen zweiter Ordnung. Der Nachweis hierfür kann jedoch an dieser Stelle nicht gegeben werden.

\*) Denn jede parallele Ebene schneidet die beiden windschiefen Geraden in zwei Punkten, deren Verbindungslinie der ersten Ebene parallel ist.

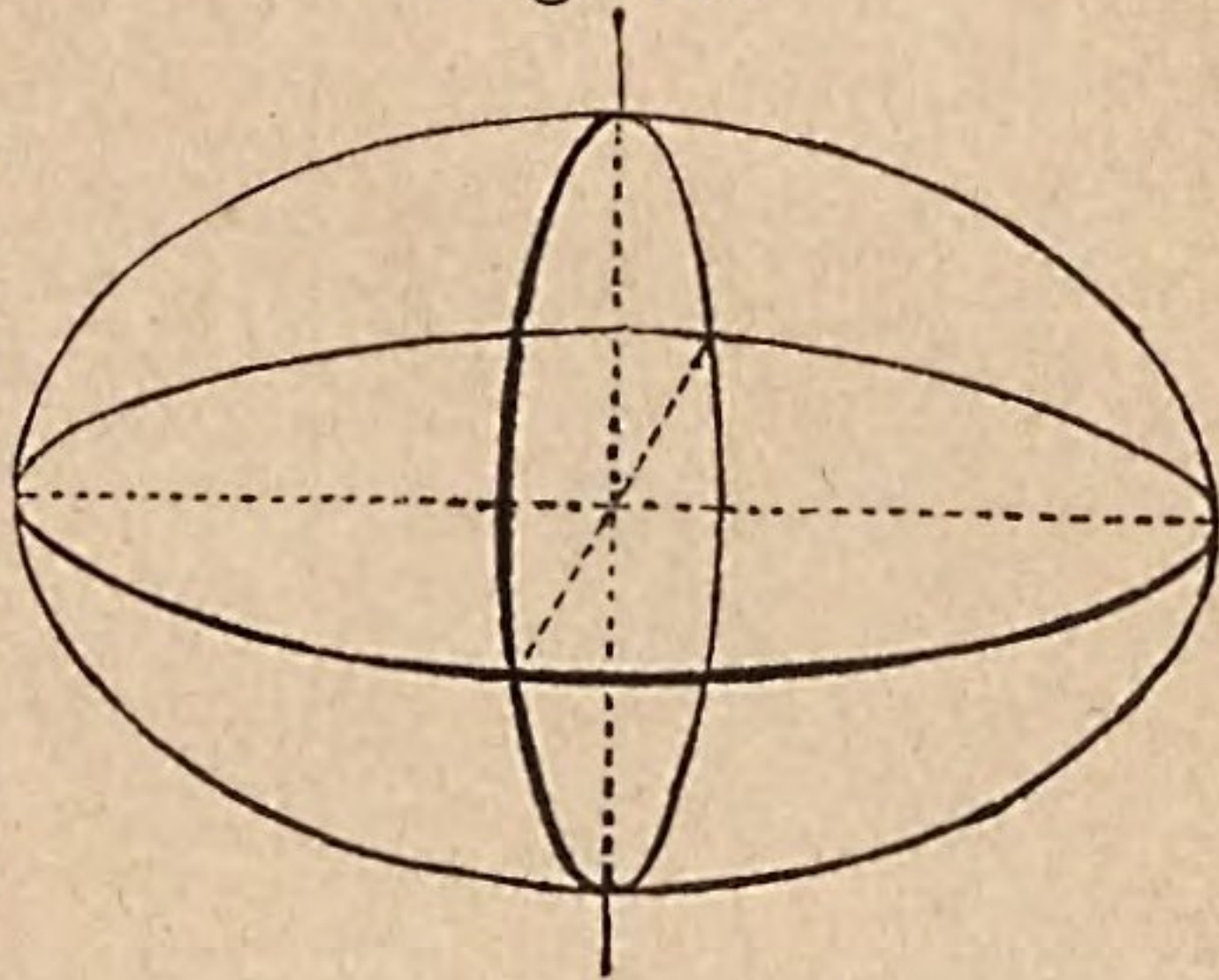


## I. Die elliptischen Flächen.

### a. Drehung der Ellipse.

**136. 1) Das Ellipsoid.** — Durch halbe Umdrehung einer Ellipse um eine ihrer Axen und nachfolgende Biegung [in Nr. 135, 1) beschrieben] entsteht das Ellipsoid. Dasselbe bildet eine vollkommen geschlossene, endliche Fläche. Die drei Hauptschnitte sind Ellipsen. Da die Fläche sich nirgends ins Unendliche ausdehnt, so müssen auch alle übrigen ebenen Schnitte Ellipsen sein. Der Mittelpunkt der gegebenen Ellipse heisst Mittelpunkt der Fläche, weil jede durch ihn zwischen zwei Punkten der Fläche gezogene Strecke in ihm halbiert wird.

Fig. 56.



*Specielle Fälle* des Ellipsoids sind: a) Das Rotationsellipsoid, wenn zwei Axen gleich lang sind. Die auf der Drehungsaxe senkrechten Schnitte sind Kreislinien. — b) Die Kugel, wenn alle drei Axen gleich lang sind. Alle Schnitte sind Kreislinien.

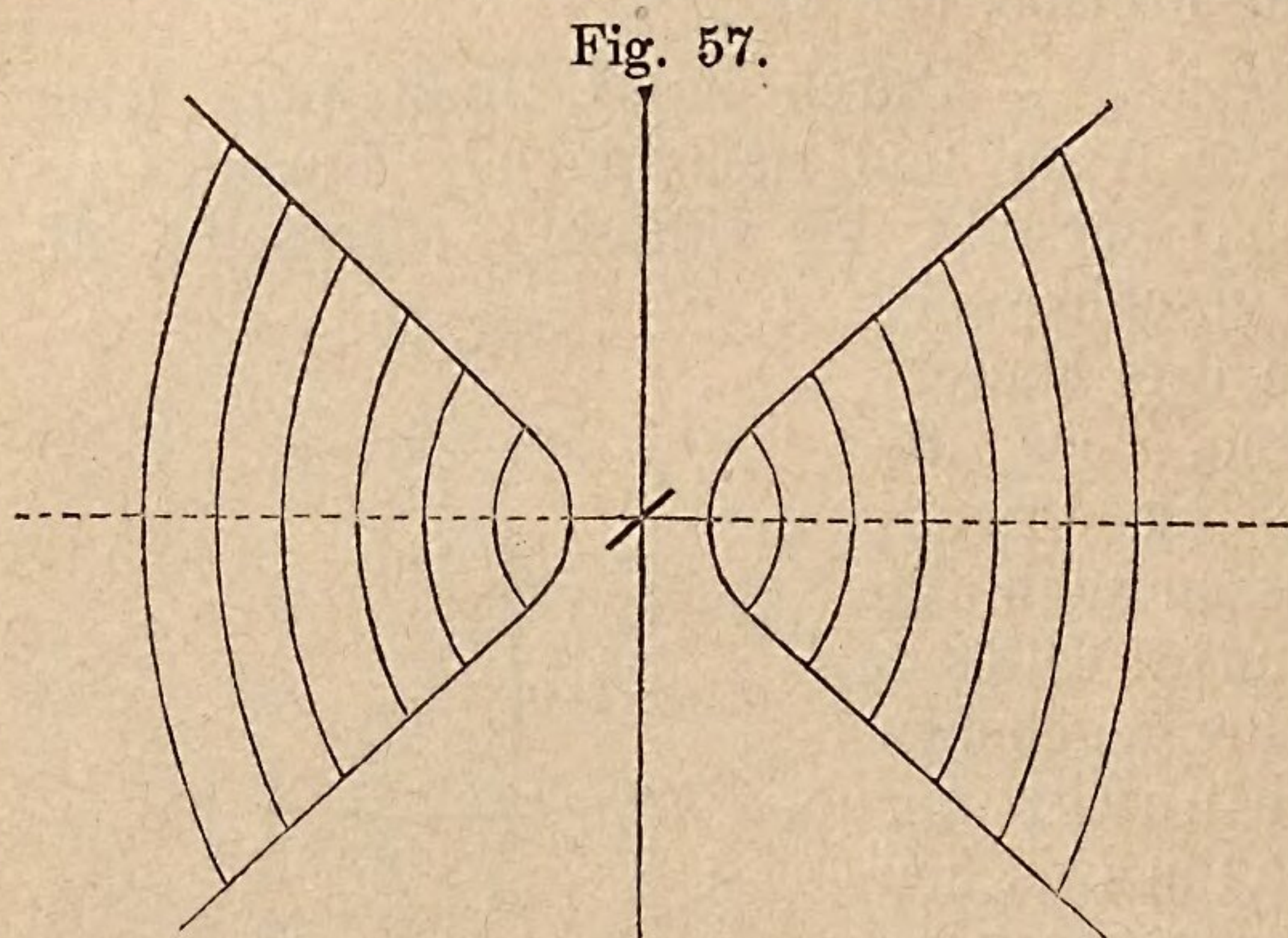
*Abarten* des Ellipsoids entstehen aus den Abarten der Ellipse. — Geht die Ellipse in eine mit ihrer grossen Axe zusammenfallende Strecke über, so entsteht a) durch Drehung um die kleine Axe eine Kreisfläche, resp. eine (doppelte) Ellipsenfläche, d. h. ein Ellipsoid, in welchem eine Axe  $= 0$  ist; b) durch Drehung um die grosse Axe dieselbe Strecke, d. h. ein Ellipsoid, in welchem zwei Axen  $= 0$  sind. — Da die Kugel in einen Punkt übergehen kann, so ist auch c) der Punkt als Abart des Ellipsoids anzusehen, d. h. als Ellipsoid, in welchem alle drei Axen  $= 0$  sind. — Geht die Ellipse in ein der grossen Axe paralleles Parallelenpaar über, so entsteht d) durch Drehung um die kleine Axe ein Paar paralleler Ebenen; e) durch Drehung um die grosse Axe die elliptische Cylinderfläche, von der weiter unten die Rede sein wird. (Man beachte, dass die ebenen Schnitte der Abarten des Ellipsoids zum teil Abarten der Ellipse sind.)

### b. Drehung der Hyperbel.

**137. 2) Das zweischalige Hyperboloid.** — Durch halbe Umdrehung einer Hyperbel um ihre Hauptaxe und nachfolgende



Biegung entsteht das zweischalige Hyperboloid. Dasselbe besteht aus zwei getrennten, je nach einer Seite offenen und ins



Unendliche sich erstreckenden Flächen. Die beiden durch die Drehungsaxe gehenden Hauptschnitte sind Hyperbeln, ebenso alle ebenen Schnitte, welche beide Teile der Fläche treffen. Der dritte Hauptschnitt liegt zwischen beiden Teilen und trifft keinen

derselben. Alle ebenen Schnitte, welche nur einen Teil der Fläche treffen, sind Ellipsen (oder Parabeln). Der Mittelpunkt der gegebenen Hyperbel ist Mittelpunkt der ganzen Fläche. Die Asymptoten aller durch die Drehungsaxe gehenden Hyperbelschnitte liegen auf einer vollständigen Kegelfläche, dem Asymptotenkegel.

*Specielle Fälle* des zweischaligen Hyperboloids sind a) das zweischalige Rotationshyperboloid, wenn die auf der Drehungsaxe senkrechten Schnitte Kreise sind; b) das zweischalige rechtwinklige Hyperboloid, wenn der Winkel an der Spitze des Asymptotenkegels ein rechter ist.

*Abarten* des zweischaligen Hyperboloids entstehen aus den Abarten der Hyperbel. — a) Geht die Hyperbel in eine mit der Hauptaxe zusammenfallende Gerade (mit Ausnahme der Hauptaxe selbst) über, so entsteht durch Drehung um die Hauptaxe dieselbe Gerade (mit Ausnahme der Hauptaxe selbst). — b) Geht die Hyperbel in ein Paar sich schneidender Geraden über, so entsteht durch Drehung um die Hauptaxe die elliptische Kegelfläche. (Spezieller Fall: Die Rotations- oder gemeine Kegelfläche.)

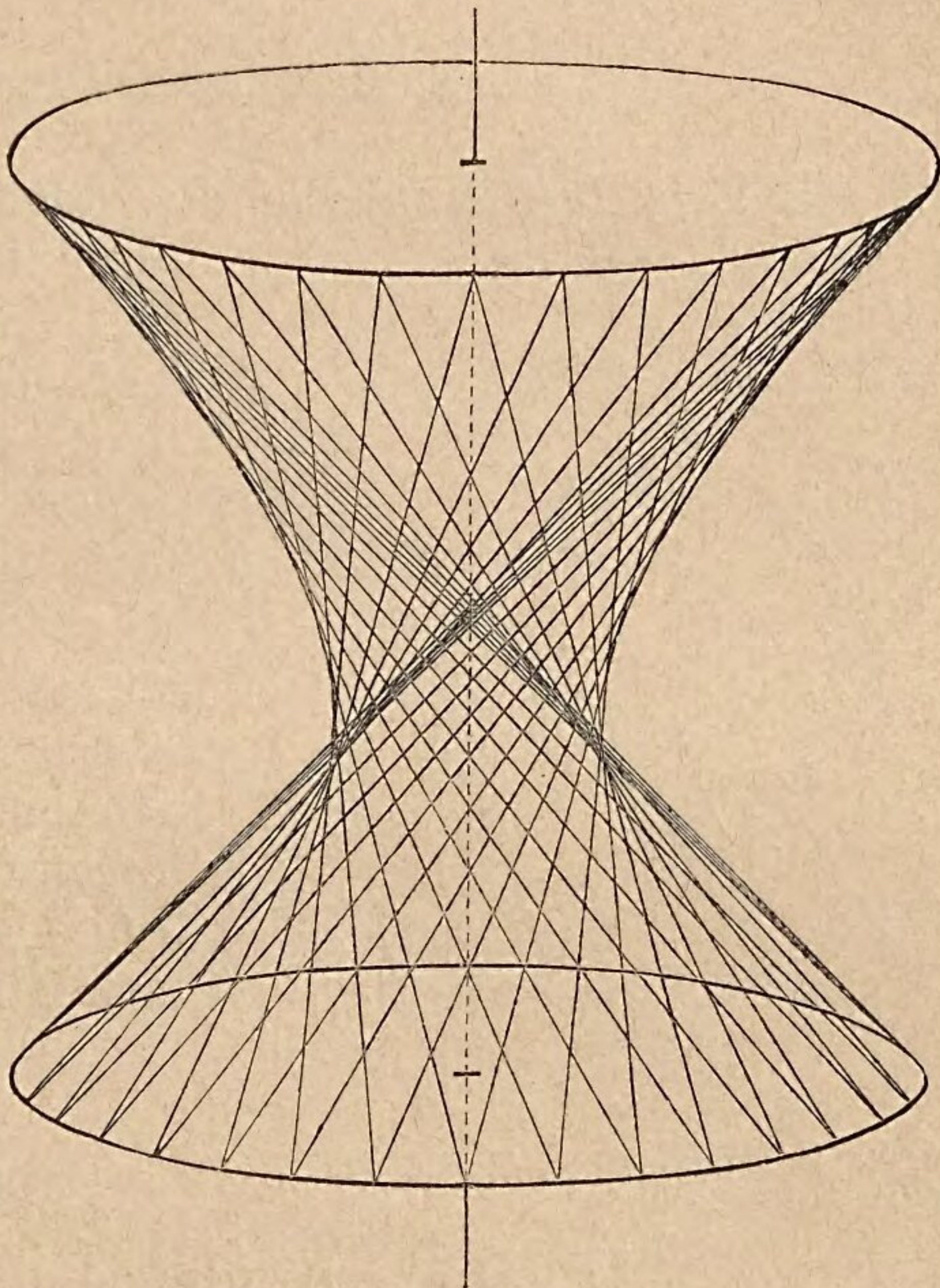
Anm. Durch den Schnitt einer vollständigen gemeinen Kegelfläche mit einer Ebene kann jede Art von Kurven zweiter Ordnung entstehen. Ist nämlich der halbe Winkel an der Spitze des Kegels gleich  $\alpha$ , so ist der Schnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Neigungswinkel der Ebene und der Axe der Kegelfläche  $> = < \alpha$  ist. Geht der Schnitt durch die Spitze der Kegelfläche, so geht die Ellipse in einen Punkt, die Parabel in eine doppelte Gerade, die Hyperbel in ein Paar sich



schneidender Geraden über. Die Kurven zweiter Ordnung heissen daher auch Kegelschnitte.

3) *Das einschalige Hyperboloid.* — Durch halbe Umdrehung einer Hyperbel um ihre Nebenaxe und nachfolgende Biegung

Fig. 58.



entsteht das einschalige Hyperboloid. Dasselbe bildet eine zusammenhängende, nach zwei Seiten offene und ins Unendliche sich erstreckende Fläche. Die beiden durch die Drehungsaxe gehenden Hauptschnitte sind Hyperbeln, ebenso alle Schnitte, welche den Asymptotenkegel in einer Hyperbel schneiden. Der dritte Hauptschnitt ist eine Ellipse; ebenso alle Schnitte, welche den Asymptotenkegel in einer Ellipse schneiden.

Schnitte, welche einer Seitenlinie des Asymptotenkegels parallel sind, sind Parabeln. Der Mittelpunkt der gegebenen Hyperbel ist Mittelpunkt der ganzen Fläche.

*Specielle Fälle* des einschaligen Hyperboloids sind: a) das einschalige Rotationshyperboloid, wenn die auf der Drehungsaxe senkrechten Schnitte Kreise sind; b) das einschalige rechtwinklige Hyperboloid, wenn der Winkel an der Spitze des Asymptotenkegels ein rechter ist.

*Abarten* des einschaligen Hyperboloids entstehen aus den Abarten der Hyperbel. — a) Geht die Hyperbel in eine mit der Hauptaxe zusammenfallende Gerade (mit Ausnahme der Hauptaxe selbst) über, so entsteht durch Drehung um die Nebenaxe eine Ebene (mit Ausnahme derjenigen Kreisfläche, welche die Hauptaxe zum Durchmesser hat). — b) Geht die Hyperbel in ein Paar sich schneidender Geraden über, so ent-

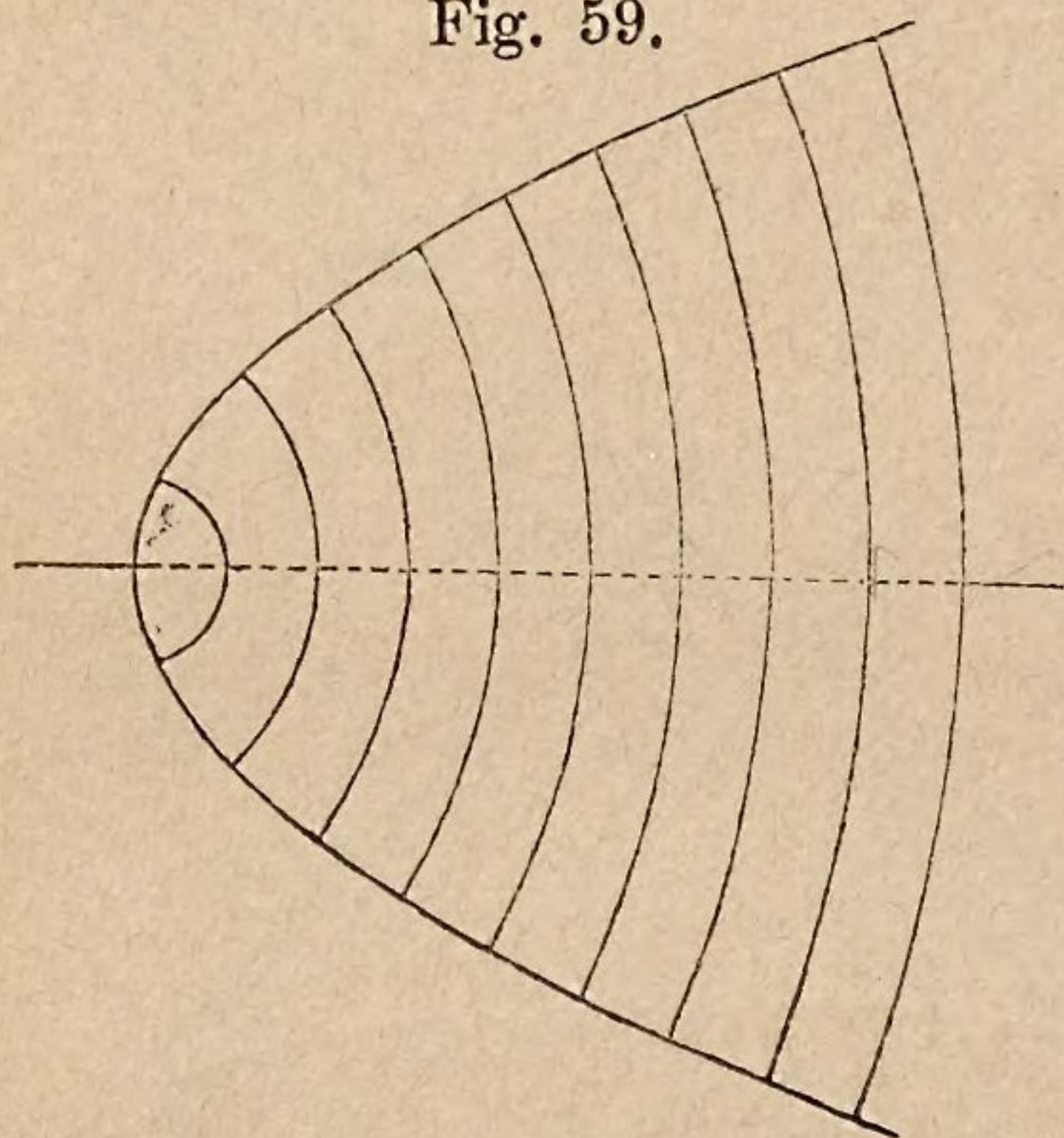


steht durch Drehung um die Nebenaxe wieder die elliptische Kegelfläche.

Anm. Die elliptische Kegelfläche bildet also den Grenzfall zwischen dem ein- und dem zweischaligen Hyperboloid.

### c. Drehung der Parabel.

138. 4) *Das elliptische Paraboloid.* — Durch halbe Umdrehung einer Parabel um ihre Axe und nachfolgende Biegung entsteht das elliptische Paraboloid. Dasselbe bildet eine nach einer Seite offene, ins Unendliche sich erstreckende Fläche. Die beiden durch die Drehungsaxe gehenden Hauptschnitte sind Parabeln, der dritte Hauptschnitt ist eine Ellipse. Die übrigen Schnitte sind Ellipsen oder Parabeln. Die Fläche besitzt keinen Mittelpunkt.



## II. Die cylindrischen Flächen.

### a. Verschiebung der Ellipse.

139. 5) *Die elliptische Cylinderfläche.* — Durch Verschiebung einer Ellipse längs einer zu ihrer Ebene senkrechten Geraden entsteht die elliptische Cylinderfläche. Dieselbe bildet eine nach zwei Seiten offene und ins Unendliche sich erstreckende Fläche. Jeder Punkt der vom Mittelpunkte der Ellipse beschriebenen Geraden (Axe der Fläche) ist ein Mittelpunkt der Fläche. Dieselbe besitzt also unendlich viele Mittelpunkte.

*Spezieller Fall* der elliptischen Cylinderfläche: Die Rotations- oder gemeine Cylinderfläche, wenn die erzeugende Ellipse eine Kreislinie ist.



*Abarten* der elliptischen Cylinderfläche: a) Ein von zwei parallelen Geraden begrenzter Ebenenstreifen, wenn die Ellipse in eine Strecke ausartet; b) die Gerade, wenn die Ellipse in einen Punkt ausartet; c) ein Paar paralleler Ebenen, wenn die Ellipse in ein Parallelenpaar ausartet.

### b. Verschiebung der Hyperbel.

**140.** 6) *Die hyperbolische Cylinderfläche.* — Durch Verschiebung einer Hyperbel längs einer zu ihrer Ebene senkrechten Geraden entsteht die hyperbolische Cylinderfläche. Dieselbe besteht aus zwei getrennten, je nach drei Seiten offenen und ins Unendliche sich erstreckenden Flächen. Jeder Punkt der vom Mittelpunkte der Hyperbel beschriebenen Geraden (Axe der Fläche) ist ein Mittelpunkt der Fläche. Dieselbe besitzt also unendlich viele Mittelpunkte.

*Specieller Fall* der hyperbolischen Cylinderfläche: Die rechtwinklige hyperbolische Cylinderfläche, wenn die erzeugende Hyperbel rechtwinklig ist.

 *Abarten* der hyperbolischen Cylinderfläche: a) Eine Ebene (mit Ausnahme eines von zwei parallelen Geraden begrenzten Streifens, welchen die Hauptaxe beschreibt), wenn die Hyperbel in eine Gerade (mit Ausnahme der Hauptaxe) ausartet; b) Ein Paar sich schneidender Ebenen, wenn die Hyperbel in ein Paar sich schneidender Geraden ausartet.

### c. Verschiebung der Parabel.

**141.** 7) *Die parabolische Cylinderfläche.* — Durch Verschiebung einer Parabel längs einer zu ihrer Ebene senkrechten Geraden entsteht die parabolische Cylinderfläche. Dieselbe bildet eine nach drei Seiten offene und ins Unendliche sich erstreckende Fläche, welche keinen Mittelpunkt besitzt.

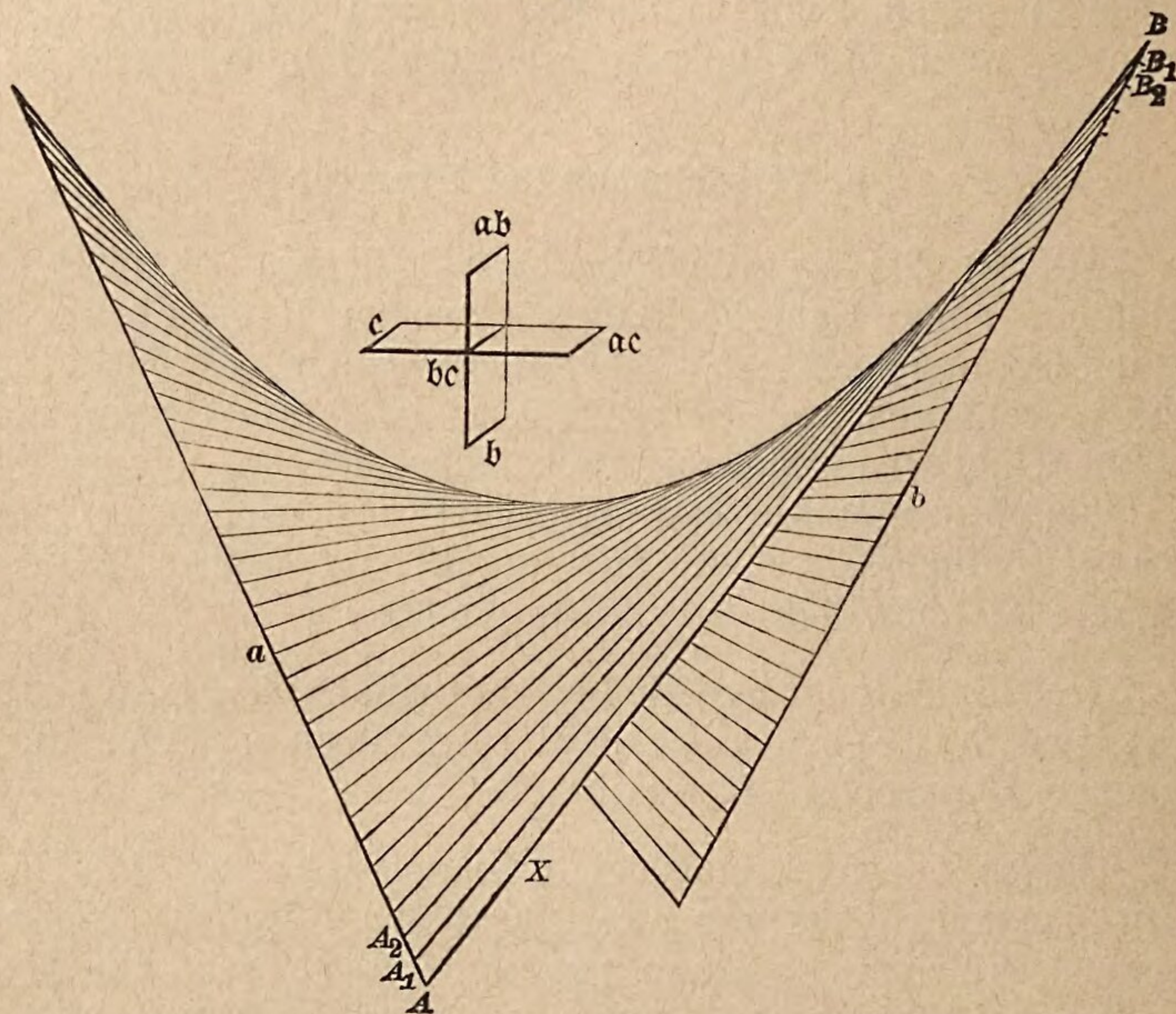
## III. Die windschiefe Fläche.

**142.** 8) *Das hyperbolische Paraboloid.* — Die Entstehung und die wesentlichen Eigenschaften des hyperbolischen Paraboloids wurden bereits in Nr. 135, 3) beschrieben. Es ist noch



hinzuzufügen, dass, wenn in Fig. 60  $a$  die Ebene des Papiers,  $b$  und  $c$  zwei darauf senkrechte, bzw. durch die Geraden  $ab$

Fig. 60.



und  $ac$  gehende Ebenen bedeuten, alsdann die Fläche von den Ebenen  $a$  und  $b$  in Parabeln, von  $c$  in einer Hyperbel geschnitten wird. Die Fläche besitzt keinen Mittelpunkt, aber durch jeden ihrer Punkte gehen zwei Geraden.



## Uebungssätze und Aufgaben.

### Reine Stereometrie.

#### 1. Die Ebene.

*Sätze.* — 1. Zwei Punkte haben von einer Ebene gleichen Abstand, wenn zwei aus ihnen nach der Ebene unter gleichen Neigungswinkeln gezogene Strecken einander gleich sind. — 2. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so ist jede auf der Geraden errichtete Senkrechte der Ebene parallel. — 3. Ist eine von mehreren Parallelen einer Ebene parallel, so sind auch die andern der Ebene parallel. — 4. Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so sind alle von Punkten der Geraden auf die Ebene gefällten Senkrechten einander gleich. — 5. Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so sind alle von Punkten der Geraden nach der Ebene gezogenen parallelen Strecken einander gleich. — 6. Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so liegt jede durch einen Punkt der Ebene zu der Geraden gezogene Parallele in dieser Ebene. — 7. Die Ebene des Neigungswinkels zweier Ebenen steht senkrecht zur Schnittlinie derselben. — 8. Jede zur Schnittlinie zweier Ebenen senkrechte Ebene schneidet dieselben in Schenkeln eines Neigungswinkels. — 9. Wenn eine Ebene und eine Gerade auf einer andern Ebene senkrecht stehen, so sind sie parallel. — 10. Alle durch einen Punkt ausserhalb einer Ebene zu dieser gezogenen Parallelen liegen in einer zu der gegebenen Ebene parallelen Ebene. — 11. Haben mehrere nicht in einer Geraden liegende Punkte gleichen Abstand von einer Ebene, und liegen ausserdem auf derselben Seite der Ebene, so liegen sie in einer zu der gegebenen Ebene parallelen Ebene. — 12. Die Verbindungsstrecke zweier Punkte, welche auf entgegengesetzten Seiten einer Ebene liegen, und gleichen Abstand von derselben haben, wird durch die Ebene halbiert. — 13. Werden zwei Ebenen von Geraden geschnitten, die durch einen Punkt gehen,



so sind die Figuren, welche in jeder Ebene durch Verbindung der entsprechenden Schnittpunkte entstehen, kollinear, wenn die Ebenen sich schneiden, ähnlich, wenn sie parallel sind. Werden zwei Ebenen von parallelen Geraden geschnitten, so sind die Figuren, welche in jeder Ebene durch Verbindung der entsprechenden Schnittpunkte entstehen, affin, wenn die Ebenen sich schneiden, kongruent, wenn sie parallel sind. — 14. In jeder dreiseitigen Ecke, die einen rechten Winkel enthält, ist der Cosinus der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite gleich dem Produkte der Cosinus der beiden anderen Seiten.

*Aufgaben.* — In einer Ebene eine Gerade so zu ziehen, dass jeder Punkt dieser Geraden von zwei ausserhalb der Ebene gegebenen Punkten 15) gleichen, 16) einen gegebenen Abstand hat. — In einer Ebene diejenige Gerade zu ziehen, welche von einem ausserhalb der Ebene gegebenen Punkte eine gegebene Entfernung hat und 17) durch einen gegebenen Punkt geht, 18) einer in der Ebene gegebenen Geraden parallel ist. — 19) Durch den Schnittpunkt einer Geraden und einer Ebene in der letzteren eine Gerade zu ziehen, welche mit der ersteren einen gegebenen Winkel bildet. — 20) Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, dass sie zwei gegebene windschiefe Geraden schneidet. — 21) Zwischen zwei windschiefen Geraden diejenige Gerade zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden parallel ist. — 22) Eine Gerade zu ziehen, welche von drei im Raume gegebenen parallelen Geraden gleichen Abstand hat. — 23) Durch eine gegebene Gerade eine Ebene so zu legen, dass sie von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat. — 24) Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene so zu legen, dass sie von einer gegebenen Geraden einen gegebenen Abstand hat. — 25) Eine Gerade so zu ziehen, dass sie auf zwei gegebenen windschiefen Geraden senkrecht steht. — Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene so zu legen, dass sie 26) auf zwei gegebenen Ebenen senkrecht steht, 27) von drei gegebenen Punkten gleichen Abstand hat. — 28) Eine Gerade parallel zu zwei gegebenen Ebenen so zu ziehen, dass sie von jeder einen gegebenen Abstand hat. — Aus einem gegebenen Punkte nach einer gegebenen Ebene eine Strecke so zu ziehen, dass sie einer anderen gegebenen Ebene parallel ist und 29) eine gegebene Länge hat, 30) mit der ersten Ebene einen gegebenen Winkel bildet. — 31) Durch einen gegebenen Punkt diejenige Ebene zu legen, welche zu zwei gegebenen windschiefen Geraden parallel ist.



## 2. Der Körper.

*Sätze.* — 32. Verbindet man jeden Eckpunkt eines Tetraeders mit dem Schnittpunkt der Mittellinien der gegenüberliegenden Seite, so gehen diese vier Geraden durch einen Punkt und teilen sich im Verhältnis 1:3. — 33. Die Halbierungsebenen der Winkel eines Tetraeders schneiden sich in einem Punkte, welcher von den Seiten des Tetraeders gleichweit entfernt ist. — 34. Errichtet man Senkrechten in den Mittelpunkten der den Seiten eines Tetraeders umbeschriebenen Kreise, so schneiden sich diese Senkrechten in einem Punkte, welcher von den Ecken des Tetraeders gleichweit entfernt ist. — 35. Die in den Mitten der Kanten eines Tetraeders senkrecht auf ihnen errichteten Ebenen schneiden sich in einem Punkte. — 36. Die Verbindungsstrecken der Mitten je zweier gegenüberliegender Kanten eines Tetraeders schneiden sich in demselben Punkte wie die in A. 32 erwähnten Geraden. — 37. Vier von den Halbierungspunkten der Kanten eines Tetraeders sind Ecken eines Parallelogramms, dessen Seiten die Hälften der beiden anderen Kanten sind. — 38. Sind in einem Tetraeder zwei Paar Gegenkanten einander gleich, so sind je zwei Seiten und je zwei Ecken, die eine Kante des dritten Paares gemeinsam haben, kongruent. — 39. Sind in einem Tetraeder je zwei Paar Gegenkanten einander gleich, so sind alle Seiten und alle Ecken einander kongruent. — 40. Die sechs Winkel eines Tetraeders betragen zusammen mehr als  $4R$  und weniger als  $6R$ . — 41. Die Halbierungsebene eines Flächenwinkels im Tetraeder teilt die gegenüberliegende Kante im Verhältnis der Flächen der den Winkel einschliessenden Seiten. — 42. Zieht man aus einer Ecke eines Tetraeders eine Gerade, welche mit den Seiten dieser Ecke gleiche Winkel bildet, und verbindet den Schnittpunkt dieser Geraden und der gegenüberliegenden Seite ( $\alpha$ ) mit den drei anderen Eckpunkten des Tetraeders, so zerfällt die Seite  $\alpha$  in drei Dreiecke, deren Flächen sich verhalten wie die anstossenden Seiten des Tetraeders. — 43. Sind aus den Eckpunkten ( $A, B, C, D$ ) eines Tetraeders durch einen Punkt ( $M$ ) innerhalb desselben Geraden gezogen, welche die gegenüberliegenden Seiten in den Punkten  $A_1, B_1, C_1, D_1$  schneiden, so ist  $\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} + \frac{MD_1}{DD_1} = 1$ . — 44. Ein Tetraeder wird durch jede Ebene halbiert, welche durch die Halbierungspunkte zweier Paare von Gegenkanten gelegt ist. —



45. Sind in einem Tetraeder je zwei Gegenkanten einander gleich, so ist jede der äusseren Berührungskugeln achtmal so gross als die innere.

46. Die Summe aller Raumwinkel in einer Säule beträgt  $12R$ . — 47. In einem  $n$ -seitigen Prisma beträgt die Summe der Raumwinkel an den Seitenkanten  $(2n - 4)R$ , an den Grundkanten  $2nR$ . — 48. Trägt man von einem Eckpunkt eines Würfels, dessen Kante  $a + b$  ist, auf den drei anstossenden Kanten gleiche Stücke  $b$  ab, und legt durch jeden Endpunkt eines Kantenstücks eine zu der Ebene der beiden andern Kanten parallele Ebene, so zerfällt der Würfel in 8 Körper, nämlich zwei Würfel ( $a^3$  und  $b^3$ ), 3 kongruente rechteckige Säulen ( $a^2b$ ) und drei andere kongruente rechteckige Säulen ( $ab^2$ ).\*) — 49. Legt man durch die drei Seitenkanten eines dreiseitigen Prismas drei Ebenen, welche entweder die an diesen Kanten liegenden Raumwinkel oder die gegenüberliegenden Seiten halbieren, oder auf letzteren senkrecht stehen, so schneiden sich diese drei Ebenen jedesmal in einer Geraden. — 50. Verbindet man die Eckpunkte einer Grundfläche des dreiseitigen Prismas mit den Mitten der gegenüberliegenden Kanten der andern Grundfläche, so schneiden sich diese drei Geraden in einem Punkte und teilen sich im Verhältniss von 1 : 2.

51. In jedem Polyeder ist die Anzahl der Kanten halb so gross als die Anzahl der Kantenwinkel.

## Rechnende Stereometrie.

### 1. Das Prisma und die Pyramide.

*Aufgaben.* — Kante, Oberfläche und Volumen eines Würfels zu berechnen, wenn gegeben ist 52) eine Diagonalaxe, 53) der Umfang eines Diagonalschnittes, 54) der Inhalt eines Diagonalschnittes. — 55) In einer geraden quadratischen Pyramide, deren Grundkante gleich  $a$  und deren Höhe gleich  $h$  ist, steht ein Würfel so, dass vier seiner Eckpunkte in der Grundfläche, und die vier andern in den Seitenkanten der Pyramide liegen. Wie gross ist die Kante des Würfels? — 56) Dieselbe Aufgabe, wenn die Seitenflächen der Pyramide gleichseitige Dreiecke sind. — 57) Dieselbe Aufgabe, wenn die oberen Eckpunkte des Würfels auf den Mittellinien der Seitenflächen

\*) Dieser Satz enthält die Interpretation der Formel für  $(a + b)^3$  (T. I, 44). Wie lautet der aus der Formel für  $(a - b)^3$  folgende Satz?



liegen. — 58) Ein gleichseitiges Dreieck ist gleichzeitig die Grundfläche eines geraden Prismas und einer geraden Pyramide von gleicher Höhe. Wie gross ist diese Höhe, wenn die Seitenfläche des Prismas  $n$ -mal so gross ist als die der Pyramide? — 59) Dieselbe Aufgabe, wenn statt des gleichseitigen Dreiecks ein regelmässiges Polygon (grosser Radius  $= r$ ) gegeben ist. — 60) Wie gross ist  $n$  in Aufgabe 58, wenn die Pyramide ein regelmässiges Tetraeder ist? — 61) In einem Würfel mit der Kante  $a$  ist eine Schnittebene durch den Mittelpunkt, senkrecht zu einer Diagonalaxe, gelegt. Wie gross ist Umfang und Inhalt der Schnittfigur? — 62) Von einem Würfel mit der Kante  $a$  sind sämtliche Ecken durch Ebenen abgeschnitten, welche durch die Mitten je dreier Kanten gehen. Wie gross sind die Kanten, die Oberfläche und der Inhalt des so entstandenen Körpers (Kubooktaeders)? — 63) Die Seitenfläche einer geraden regelmässigen dreiseitigen Pyramide ist  $n$ -mal so gross als die Grundfläche. Welchen Winkel bilden die beiden Flächen mit einander? — 64) Die Grundfläche eines Tetraeders ist ein gleichschenklige rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten gleich  $a$  sind; die Spitze liegt senkrecht über dem Schnittpunkte der Mittellinien der Grundfläche. Wenn dann die Höhe des Tetraeders gleich  $h$  ist, welche Winkel bilden die Seitenflächen mit der Grundfläche und die Seitenkanten mit den Grundkanten? Wie gross ist die Gesamtoberfläche des Tetraeders? — 65) In einem geraden regelmässigen dreiseitigen Prisma ist eine Ebene durch eine Grundkante  $a$  unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Grundfläche gelegt. Wie gross ist der Inhalt der Schnittfigur? — 66) In einem regelmässigen Tetraeder ist eine Ebene durch die Mitte einer Seitenkante und durch die gegenüberliegende Grundkante gelegt. Welchen Winkel bildet diese Ebene mit der Grundfläche? — 67) Von der grossen Pyramide zu Ghizeh, deren Grundfläche ein Quadrat ist, sagt Herodot, dass das Quadrat ihrer Höhe gleich jeder Seitenfläche sei. Wie gross ist hiernach jeder Basiswinkel in den vier kongruenten gleichschenkligen Dreiecken, welche ihre Seitenflächen bilden? Wie verhält sich der Umfang ihrer Grundfläche zur Höhe?

68) Wie gross ist die Oberfläche einer geraden Säule mit quadratischer Grundfläche, deren Grundkanten gleich  $a$  und deren Seitenkanten gleich  $b$  sind? — 69) Wie gross ist die Oberfläche und das Volumen eines geraden regelmässigen sechseitigen Prismas, dessen Grundkanten gleich  $a$  und dessen



Seitenkanten gleich  $b$  sind? — 70) Wie gross ist die Oberfläche einer geraden Säule mit quadratischer Grundfläche, wenn der Umfang eines Diagonalschnittes und eine Diagonalaxe gegeben ist? — 71) Von einer rechteckigen Säule sind die Verhältnisse der drei in einer Ecke zusammentreffenden Kanten und eine Diagonale der Grundfläche gegeben. Wie gross ist ihre Oberfläche und ihr Volumen? — 72) Durch eine rechteckige Säule mit quadratischer Grundfläche und den Kanten  $a$  und  $b$  ist ein ebener Schnitt gelegt, welcher durch eine Kante der oberen Grundfläche geht und mit letzterer einen Winkel von  $45^\circ$  bildet. Wie gross ist die Oberfläche des unteren Körpers? — 73) Aus einem geraden regelmässigen dreiseitigen Prisma, dessen Grundkante gleich  $a$  ist, ist durch zwei parallele Ebenen ein schiefes Prisma ausgeschnitten, dessen Seitenkante gleich  $b$  ist. Welchen Inhalt haben die Seitenflächen des letzteren? — 74) Aus der Oberfläche eines geraden regelmässigen zehneitigen Prismas, dessen Seitenkanten den Grundkanten gleich sind, eine Kante zu berechnen. — 75) In eine rechteckige Säule mit quadratischer Grundfläche ist eine zweite so beschrieben, dass ihre Eckpunkte die Grundkanten der ersteren halbieren. Es soll die Oberfläche der letzteren aus den Kanten der ersteren berechnet werden. — 76) Das Volumen einer Säule zu berechnen aus den Grundkanten, dem von ihnen eingeschlossenen Winkel und der Höhe. — 77) Aus dem Volumen und der Höhe einer rechteckigen Säule mit quadratischer Basis die Grundkante und die Oberfläche zu berechnen. — 78) In einem regelmässigen dreiseitigen Prisma ist die Höhe gleich einer Grundkante ( $a$ ); wie gross ist sein Volumen? — 79) Wie gross ist das Volumen einer rechteckigen Säule, deren Diagonalschnitt ein Quadrat mit dem Inhalt  $f^2$  ist, und deren Grundkanten sich wie  $a:b$  verhalten? — 80) Wie gross ist das Volumen eines dreiseitigen Prismas, dessen Seitenkanten gleich  $d$  sind und mit der Grundfläche den Winkel  $\varphi$  bilden, wenn von der Grundfläche die Stücke  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  gegeben sind? — 81) Durch die Grundkante eines Würfels, dessen Diagonalaxe  $d$  gegeben ist, ist ein Schnitt gelegt, welcher mit der Grundfläche einen Winkel  $\varphi$  ( $> 45^\circ$ ) bildet. Wie gross ist das Volumen des abgeschnittenen dreiseitigen Prismas? — 82) Wie gross muss in A. 81 der Winkel  $\varphi$  sein, damit die beiden Teile des Würfels sich wie  $m:n$  verhalten? — 83) Wie gross ist in A. 81 der Winkel  $\varphi$ , wenn die Kante des Wür-



fels gleich  $a$  und die Gesamtoberfläche des dreiseitigen Prismas gleich  $f^2$  gegeben ist? — 84) Wie gross ist das Volumen einer rechteckigen Säule, wenn die Differenzen zwischen der Höhe und den beiden Grundkanten gegeben sind, und ausserdem der Winkel, welchen die Diagonale der Grundfläche mit der grösseren Grundkante bildet? — 85) In einer geraden Säule, deren Höhe gleich der Summe der beiden Diagonalen der Grundfläche ist, und von welcher man das Volumen kennt, sind durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten zwei Schnitte mit dem Flächeninhalt  $f_1^2$  und  $f_2^2$  gelegt. Welchen Winkel bilden diese Schnitte mit einander? — 86) Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Winkel  $\alpha$  an der Spitze. Ein durch die Basis dieses Dreiecks und die gegenüberliegende Ecke des Prismas gelegter Schnitt bildet ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkeln  $d$  und dem Winkel  $\varphi$  an der Spitze. Wie gross ist das Volumen des Prismas? — 87) In eine rechteckige Säule, deren Kanten gegeben sind, ist eine zweite so konstruiert, dass die Eckpunkte ihrer Grundflächen die Grundkanten der ersteren halbieren. In die zweite ist ebenso eine dritte konstruiert, u. s. f. bis ins Unendliche. Wie gross ist die Summe der Volumina aller dieser Körper?

88) Wie gross ist die Oberfläche einer geraden regelmässigen sechsseitigen Pyramide, wenn die Grundkante  $a$  und die Höhe  $h$  ist? — 89) Von einer geraden regelmässigen dreiseitigen Pyramide, deren Höhe doppelt so gross als eine Grundkante ist, kennt man die Oberfläche; wie gross ist die Grundkante? — 90) Von einem Pyramidenstumpf mit quadratischen Grundflächen kennt man den Inhalt der kleineren Grundfläche, die Höhe des Stumpfes und die Höhe der ganzen Pyramide. Wie gross ist die Oberfläche des Stumpfes? — 91) Wie gross ist die Oberfläche einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche, wenn der Inhalt eines durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten gehenden Schnittes und der Umfang der Grundfläche gegeben ist? — 92) Wie gross ist die Oberfläche einer geraden regelmässigen dreiseitigen Pyramide, wenn die Höhe  $h$  und eine Seitenkante  $s$  gegeben ist? — 93) Ueber einer Grundfläche einer geraden Säule mit quadratischer Basis ist eine Pyramide so konstruiert, dass ihre Spitze in der Mitte der anderen Grundfläche liegt. Wie gross ist die Oberfläche der Pyramide, wenn die Kanten der Säule gegeben sind? — 94) Ueber einem regelmässigen Fünfeck als Grundfläche sind



nach beiden Seiten hin gerade Pyramiden (eine Doppelpyramide) konstruiert. Wie gross ist die Oberfläche der Doppelpyramide, wenn der Abstand ihrer Spitzen und eine Seitenkante gegeben sind? — 95) Wie gross ist die Oberfläche eines Tetraeders, von dem man die Grundkanten, die Höhe, und die Abstände des Fusspunktes der Höhe von den Ecken der Grundfläche kennt? — 96) Eine rechte Ecke ist durch eine Ebene so geschlossen, dass die Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck ist. Wie gross ist die Oberfläche der so entstandenen regelmässigen Pyramide, wenn eine Grundkante gegeben ist? — 97) Die in A. 96 beschriebene Pyramide ist durch einen Parallelschnitt abgestumpft. Wie gross ist die Oberfläche des Pyramidenstumpfes, wenn die untere und die obere Grundkante gegeben sind? — 98) Wie gross ist die Höhe einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche, wenn jede Seitenfläche der  $n^{\text{te}}$  Teil der Grundfläche ist? — 99) Eine rechte Ecke soll durch ein gegebenes schiefwinkliges Dreieck geschlossen werden. Wie gross werden die Seitenkanten und die Höhe der so entstehenden Pyramide sein? — Wie gross ist das Volumen einer Pyramide, wenn gegeben ist 100) die Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten  $a$  und  $b$ , und die Höhe  $h$ , 101) die Grundfläche ein Quadrat mit dem Inhalt  $f^2$  und alle Seitenkanten gleich  $b$ , 102) die Grundfläche ein Dreieck mit den Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , und die Höhe  $h$ , 103) die Grundfläche ein regelmässiges Sechseck mit der Seite  $a$ , und alle Seitenkanten gleich  $b$ , 104) die Grundfläche ein Quadrat mit der Seite  $a$ , und die Fläche eines durch die Spitze und eine Diagonale der Grundfläche senkrecht zu letzterer gelegten Schnittes  $f^2$ , 105) die Grundfläche ein Sehnenviereck mit den Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , und die Höhe  $h$ . — 106) Wie gross ist das Volumen einer geraden regelmässigen dreiseitigen Pyramide, wenn jede Seitenfläche  $n$ -mal so gross als die Grundfläche, und der Radius  $\rho$  des Inkreises der Grundfläche gegeben ist? — 107) Wie gross ist die Fläche eines zur Grundfläche einer Pyramide parallel gelegten Schnittes, wenn der Abstand desselben von der Grundfläche der  $n^{\text{te}}$  Teil der Höhe ist, und wenn diese Höhe  $h$  und das Volumen der Pyramide gegeben sind? — 108) Von einer geraden Pyramide mit quadratischer Basis ist das Volumen und der Inhalt eines durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten gelegten Schnittes gegeben. Wie gross ist der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche? — 109) Von einer geraden Pyramide mit quadratischer Basis ist der Inhalt einer Seitenfläche und



eines durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten gelegten Schnittes gegeben. Wie gross ist das Volumen und der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche? — 110) Aus einer quadratischen Pyramide mit der Höhe  $h$  wird eine gleich hohe quadratische Pyramide herausgenommen. Der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche ist in der ersteren  $\alpha$ , in der letzteren  $2\alpha$ . Wie gross ist das Volumen des übrig bleibenden Körpers? — 111) Wie gross ist das Volumen einer fünfseitigen Pyramide, deren Kanten alle gleich  $a$  sind? — 112) Wie gross ist das Volumen einer Pyramide, deren Grundfläche ein regelmässiges Fünfeck mit der Seite  $a$ , und deren Höhe  $h$  ist? — 113) Wie gross ist das Volumen einer Pyramide, wenn ihre Höhe  $h$ , und der Inhalt eines durch die Mitte der Höhe parallel zur Grundfläche geführten Schnittes  $f^2$  ist? — 114) Wie gross ist Oberfläche und Volumen einer vierseitigen Pyramide, deren Kanten alle gleich  $a$  sind? — 115) Wie gross ist das Volumen eines Tetraeders, von welchem drei in einem Eckpunkte zusammentreffende Kanten und die Winkel, welche diese Kanten mit einander bilden, gegeben sind?

116) Wie gross ist das Volumen eines Pyramidenstumpfes, von welchem die Grundflächen und die Höhe der Ergänzungspyramide\*) gegeben sind? — 117) Wie gross ist das Volumen eines dreiseitigen Pyramidenstumpfes, von welchem die Kanten ( $a, b, c$ ) der unteren, eine Kante ( $a_1$ ) der oberen Grundfläche, und die drei einander gleichen Seitenkanten ( $s$ ) gegeben sind? — 118) Von einem Pyramidenstumpf sind die Grundflächen und das Volumen gegeben. Wie gross ist das Volumen der Ergänzungspyramide? — 119) Von einem Pyramidenstumpf ist das Volumen, die Höhe und der Inhalt der grösseren Grundfläche gegeben. Wie gross ist der Inhalt der kleineren Grundfläche? — 120) Wie verhält sich das Volumen eines Pyramidenstumpfes zu dem der Ergänzungspyramide, wenn seine Grundflächen sich wie  $m^2 : n^2$  verhalten? — 121) In welchem Verhältnis muss die Höhe einer Pyramide durch einen zur Grundfläche parallelen Schnitt geteilt werden, damit die abgeschnittene Pyramide den  $n^{\text{ten}}$  Teil der ganzen betrage? — 122) In welchem Verhältnis wird ein Pyramidenstumpf, dessen

---

\*) D. i. die Pyramide, welche den Pyramidenstumpf zu einer vollständigen Pyramide ergänzt.



Grundflächen regelmässige Sechsecke mit den Seiten  $a$  und  $b$  sind, und dessen Höhe  $h$  ist, durch einen mit den Grundflächen parallelen, die Höhe halbierenden Schnitt geteilt? — 123) Das Volumen eines Pyramidenstumpfes, dessen Höhe  $h$  ist, ist gleich dem seiner Ergänzungspyramide. Wie gross ist die Höhe der letzteren? — 124) Von einem Pyramidenstumpf ist das Volumen, die Höhe und die Differenz der Grundflächen gegeben. Wie gross sind die letzteren?

## 2. Der Cylinder.

*Aufgaben.* — 125) Von einem schiefen Cylinder ist der Radius des Grundkreises, die Axe und der Neigungswinkel der Axe gegen die Grundfläche gegeben. Wie gross ist der Inhalt des Hauptschnittes? — 126) In einem schiefen Cylinder, von welchem der Radius des Grundkreises, die Axe und der Neigungswinkel der Axe gegen die Grundfläche gegeben ist, bildet der Neigungsschenkel der Axe mit dem zu einem Axenschnitte gehörigen Radius der Grundfläche einen gegebenen Winkel. Welchen Inhalt hat dieser Axenschnitt?

127) In welchem Verhältnis wird der Mantel eines geraden Cylinders durch eine Ebene geteilt, welche senkrecht zu einem Axenschnitt durch dessen Diagonale gelegt ist? — 128) Von einem geraden Cylinder ist durch eine mit den Grundflächen nicht parallele Ebene ein Stück so abgeschnitten, dass  $a$  die grösste und  $b$  die kleinste Seitenlinie des übrig gebliebenen Körpers ist. Wenn dann  $r$  der Radius des Grundkreises ist, wie gross ist die Mantelfläche des Restkörpers? — 129) Dieselbe Aufgabe, wenn beide Grundflächen des Cylinders durch schiefe Schnitte abgeschnitten sind. — Wie gross ist der Mantel eines geraden Cylinders, der einem gegebenen Würfel mit der Kante  $a$  130) einbeschrieben, 131) umbeschrieben ist? — 132) Wie gross ist die Höhe eines geraden Cylinders, dessen Mantel gleich der Summe der Mäntel dreier gegebener Cylinder, und dessen Grundfläche einem gegebenen gleichseitigen Dreieck mit der Seite  $a$  einbeschrieben ist? — 133) Wie gross ist die Grundkante einer rechteckigen Säule mit quadratischer Grundfläche, wenn diese Säule mit einem gegebenen geraden Cylinder gleiche Höhe und Gesamtoberfläche hat? — 134) Aus einem geraden Cylinder, von dem der Radius der Grundfläche  $r$  gegeben ist, ist durch zwei parallele, zur



Grundfläche schiefe Schnitte ein Cylinder herausgeschnitten, dessen Seitenlinie  $a$  ist. Wie gross ist der Mantel des ausgeschnittenen Cylinders? — 135) Von einem geraden Cylinder ist der Mantel und die Diagonale  $d$  eines Axenschnittes gegeben. In den Cylinder ist eine regelmässige gerade achtseitige Pyramide beschrieben. Wie gross ist deren Grundkante? (Spezieller Fall: der Mantel des Cylinders ist gleich der Fläche eines Kreises mit dem Radius  $\frac{1}{2}d$ .) — 136) Ein gerader Cylinder, dessen Axenschnitt ein Quadrat, und in dem der Radius des Grundkreises  $r$  ist, ist durch eine gerade Cylinderfläche, die mit der ersten dieselbe Axe hat, ausgehöhlt. Wenn die Mäntel der beiden Cylinderflächen sich wie  $m:n$  verhalten, wie gross ist die Gesamtoberfläche des ausgehöhlten Cylinders? — 137) Drei gerade Cylinder stehen so auf einander, dass ihre Axen auf derselben Geraden liegen. Wenn nun der Axenschnitt des untersten ein Quadrat mit der Fläche  $f^2$  ist, wenn ferner die Höhe in jedem folgenden doppelt so gross, und der Radius des Grundkreises in jedem folgenden halb so gross ist als im vorhergehenden, wie gross ist dann die Gesamtoberfläche des Gesamtkörpers?

138) Wie gross ist das Volumen einer cylindrischen Röhre, deren Höhe  $h$ , und deren Radien  $r$  und  $\varrho$  sind? — 139) Wie dick ist die Seitenwand einer cylindrischen Röhre, wenn ihr Volumen  $\mathfrak{B}$ , der grössere Radius  $r$  und die Höhe  $h$  gegeben sind? — Wenn  $f^2$  der Mantel,  $r$  der Radius der Grundfläche,  $h$  die Höhe und  $\mathfrak{B}$  das Volumen eines geraden Cylinders ist, so soll man berechnen 140)  $\mathfrak{B}$  aus  $f^2$  und  $r$ , 141)  $\mathfrak{B}$  aus  $f^2$  und  $h$ , 142)  $f^2$  aus  $\mathfrak{B}$  und  $r$ , 143)  $f^2$  aus  $\mathfrak{B}$  und  $h$ . — 144) Wie gross ist das Volumen eines Cylinders, dessen Axe  $a$  mit der Grundfläche den Winkel  $\varphi$  bildet, wenn der Inhalt des Hauptschnittes  $f^2$  ist? — 145) In einen Würfel lassen sich zwei Arten gerader Cylinder so konstruieren, dass die Mittelpunkte der 6 Würfelflächen auf der Oberfläche eines Cylinders liegen. Wie verhalten sich die Volumina der beiden Cylinder? — 146) In einen geraden Cylinder, von dem  $r$  und  $h$  gegeben sind, ist ein Pyramidenstumpf so beschrieben, dass seine untere Grundfläche ein der Grundfläche des Cylinders einbeschriebenes Quadrat ist, während seine obere Grundfläche mit der des Cylinders in derselben Ebene liegt. Wenn dann alle Seitenkanten mit den Grundkanten Winkel von  $\frac{2}{3}R$  bilden, um wieviel unterscheiden sich die Volumina beider Körper? —



147) Wie gross ist das Volumen eines geraden Cylinders, von dem die Gesamtoberfläche und die Summen von Seite und Radius gegeben sind? — 148) Wie gross ist das Volumen eines schief abgeschnittenen Cylinders (vgl. A. 128), wenn der Radius des Grundkreises, die grösste und die kleinste Seitenlinie gegeben sind? — 149) Von einem geraden Cylinder ist  $h$  und  $r$  gegeben. Ein anderer, dem ersten nicht kongruenter, gerader Cylinder hat mit ihm gleiches Volumen und gleiche Gesamtoberfläche. Wie gross ist Höhe und Radius dieses zweiten? — 150) Von einem geraden Cylinder ist  $h$  und  $r$  bekannt. Ein Schnitt parallel der Axe und um  $\frac{1}{2}r$  von ihr entfernt, teilt den Cylinder in zwei Teile. Wie gross ist das Volumen des kleineren Teils? — 151) In einem geraden Cylinder, dessen Mantel  $f^2$  ist, bilden die Diagonalen des Axenschnittes den spitzen Winkel  $\alpha$ . Wie gross ist das Volumen des Cylinders? — 152) Von einem geraden dreiseitigen Prisma ist gegeben die Höhe  $h$  und zwei Winkel der Grundfläche,  $R$  und  $\alpha$ . Wie gross ist die Summe seiner Seitenflächen, wenn der Mantel des ihm eingeschriebenen Cylinders  $f^2$  ist? — 153) Von einem geraden dreiseitigen Prisma, dessen Höhe gleich dem Radius des Umkreises der Grundfläche ist, sind zwei Winkel der Grundfläche und das Volumen gegeben. Wie gross ist der Mantel des dem Prisma umbeschriebenen Cylinders? — 154) In ein regelmässiges Tetraeder mit der Kante  $a$  ist ein Cylinder so eingeschrieben, dass die Grundflächen in eine Ebene fallen. Wenn dann die halbe Axe des Cylinders dem Radius der Grundfläche gleich ist, wie gross ist dieser Radius? — 155) Von einem dreiseitigen Prisma ist die Grundfläche durch die Stücke  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und das Volumen gegeben. Wie gross ist das Volumen des dem Prisma umbeschriebenen Cylinders? — 156) In ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundkanten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  gegeben sind, ist ein Cylinder beschrieben, dessen Seitenlinie  $s$  mit der Grundfläche den Winkel  $\varphi$  bildet. Wie gross ist sein Volumen? — 157) Eine cylindrische Röhre, deren Grundfläche  $g^2$  ist, deren Axe  $a$  mit der Grundfläche den Winkel  $\varphi$  bildet, und in der die Radien der Grundfläche ( $r$  und  $\rho$ ) sich wie  $m:n$  verhalten, wird in ein regelmässiges Tetraeder verwandelt. Wie gross ist die Oberfläche desselben, und wie verhält sich  $r$  zur Kante des Tetraeders?



### 3. Der Kegel. \*)

*Aufgaben.* — Im schiefen Kegel soll berechnet werden  
 158)  $r$  aus  $s, \sigma, a$ , 159)  $a$  aus  $s, \sigma, r$ , 160)  $\sigma$  aus  $s, a, r$ ,  
 161)  $s$  aus  $\sigma, a, r$ , 162)  $h, s, \sigma$  aus  $a, \varphi, r$ , 163)  $\varphi, s, \sigma, \beta$   
 aus  $a, h, r$ , 164)  $h, \varphi, r$  aus  $s, \sigma, \beta$ , 165)  $s, \sigma, \varphi, h$  aus  $a, r, \beta$ ,  
 166)  $s, \sigma$  aus  $a, r^2\pi, \alpha$ .

Im geraden Kegel oder Kegelstumpf soll berechnet werden  
 167)  $r$  aus  $f^2, s$ , 168)  $s$  aus  $f^2, r$ , 169)  $f^2$  aus  $r, h$ ,  
 170)  $f^2$  aus  $s, h$ , 171)  $h$  aus  $f^2, r$ , 172)  $h$  aus  $s, f^2$ , 173)  $r$   
 aus  $f^2, h$ , 174)  $s$  aus  $f^2, h$ ,

$f^2$  aus 175)  $h, h_1, s_1$ , 176)  $r, \varrho, s_1$ , 177)  $r, s_1, h_1$ , 178)  $r$ ,  
 $\varrho, h_1$ , 179)  $h, h_1, \varrho$ , 180)  $\varrho, s_1, h_1$ , 181)  $s, s_1, \varrho$ , 182)  $s, s_1, h_1$ ,

183)  $h$  aus  $f^2, h_1, s_1$ , 184)  $h_1$  aus  $h, f^2, s_1$ , 185)  $s_1$  aus  
 $f^2, h, h_1$ , 186)  $s_1$  aus  $f^2, r, \varrho$ , 187)  $\varrho$  aus  $r, f^2, s_1$ , 188)  $r$   
 aus  $f^2, \varrho, s_1$ , 189)  $r$  aus  $f^2, s_1, h_1$ , 190)  $s_1$  aus  $f^2, h_1, r$ ,  
 191)  $h_1$  aus  $f^2, r, s_1$ , 192)  $h_1$  aus  $f^2, r, \varrho$ , 193)  $\varrho$  aus  $f^2, r, h_1$ ,  
 194)  $h_1$  aus  $f^2, h, \varrho$ , 195)  $\varrho$  aus  $f^2, h, h_1$ , 196)  $\varrho$  aus  $f^2, s_1, h_1$ ,  
 197)  $h_1$  aus  $f^2, \varrho, s_1$ , 198)  $\varrho$  aus  $f^2, s, s_1$ , 199)  $s_1$  aus  $f^2, s, \varrho$ ,  
 200)  $s$  aus  $f^2, \varrho, s_1$ , 201)  $s$  aus  $f^2, s_1, h_1$ , 202)  $h_1$  aus  $f^2, s, s_1$ ,  
 203)  $s_1$  aus  $f^2, s, h_1$ ,

$f_1^2$  aus 204)  $s, s_1, \varrho$ , 205)  $\varrho, s_1, h_1$ , 206)  $r, s_1, h_1$ , 207)  $r, \varrho, s$ ,  
 208)  $h, h_1, \varrho$ ,

209)  $\varrho$  aus  $f_1^2, s, s_1$ , 210)  $s$  aus  $f_1^2, \varrho, s_1$ , 211)  $s_1$  aus  
 $f_1^2, s, \varrho$ , 212)  $\varrho$  aus  $f_1^2, s_1, h_1$ , 213)  $h_1$  aus  $f_1^2, s_1, \varrho$ , 214)  $r$   
 aus  $f_1^2, s_1, h_1$ , 215)  $h_1$  aus  $f_1^2, r, s_1$ , 216)  $s$  aus  $f_1^2, r, \varrho$ ,  
 217)  $\varrho$  aus  $f_1^2, r, s$ , 218)  $r$  aus  $f_1^2, s, \varrho$ ,

219)  $f_1^2$  aus  $f^2, r, \varrho$ , 220)  $f_1^2$  aus  $f^2, r, s_1$ , 221)  $f_1^2$   
 aus  $f^2, \varrho, s_1$ .

222) Auf derselben Grundfläche steht ein gerader Cylinder  
 und ein gerader Kegel von gleicher Höhe. Wie verhalten sich

| *) Bezeichnungen:    | Vol.           | Mantel  | Grösste u. kleinste<br>Seitenlinie | Radien       | Axe u.<br>Höhe |
|----------------------|----------------|---------|------------------------------------|--------------|----------------|
| Gerader Kegel        | $\mathfrak{B}$ | $f^2$   | $s$                                | $r$          | $h$            |
| Gerader Kegelstumpf  | $\mathfrak{B}$ | $f_1^2$ | $s_1$                              | $r, \varrho$ | $h_1$          |
| Schiefer Kegel       | $\mathfrak{B}$ | $f^2$   | $s, \sigma$                        | $r$          | $a, h$         |
| Schiefer Kegelstumpf | $\mathfrak{B}$ | $f_1^2$ | $s_1, \sigma_1$                    | $r, \varrho$ | $a_1, h_1$     |

$\varphi$  Neigungswinkel der Axe gegen die Grundfläche.

$\beta, \gamma$  Neigungswinkel der grössten und kleinsten Seitenlinie gegen die Grundfl.

$\alpha$  Winkel an der Spitze des Hauptschnittes.



die Mäntel beider Körper und wie gross ist die ganze Oberfläche des Gesamtkörpers? — 223) Auf den Grundflächen eines geraden Cylinders, dessen Höhe  $h$ , dessen Radius  $r$  ist, stehen zwei gerade Kegel, deren Radien und Höhen gleich  $r$  sind. Wie gross ist die Oberfläche des Gesamtkörpers? — 224) Um eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche, der Grundkante  $a$  und der Höhe  $h$  ist ein Kegel beschrieben. Wie gross ist dessen Mantel? — 225) Die Spitze eines Kegels liegt im Mittelpunkte der oberen Grundfläche eines geraden regelmässigen achtseitigen Prismas, von dem die Grundkante  $a$  und die Höhe  $h$  gegeben ist; die Grundfläche des Kegels ist der unteren Grundfläche des Prismas einbeschrieben. Wie gross ist der Mantel des Kegels? — 226) Der Axenschnitt eines geraden Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck, seine Höhe gleich  $h$ , wie gross ist sein Mantel? — 227) In einem geraden Kegelstumpf ist der Durchmesser der oberen Grundfläche den Seitenlinien gleich. Wenn dann der Umfang eines Axenschnittes und die Höhe gegeben ist, wie gross ist der Mantel? — 228) Wie gross ist die Höhe eines geraden Kegels mit dem Radius  $r$ , wenn sein Mantel gleich dem eines Cylinders von halb so grosser Höhe und viermal so grosser Grundfläche ist? — 229) Um einen geraden Cylinder mit der Höhe  $h$  und dem Radius  $r$  ist ein Kegelstumpf so beschrieben, dass die oberen Grundflächen zusammenfallen, die unteren konzentrisch sind und sich wie  $m^2 : n^2$  verhalten. Wie gross ist der Mantel des Kegelstumpfes und die Oberfläche des durch Herausschneiden des Cylinders aus dem Kegelstumpf entstehenden Körpers? — 230) Ein Quadrat mit der Seite  $a$  macht eine halbe Umdrehung um eine Diagonale. Wie gross ist der Mantel des entstehenden Doppelkegels? — 231) Dieselbe Aufgabe, wenn eine ganze Umdrehung um eine parallel zur Diagonale durch eine Ecke des Quadrats gezogene Axe stattfindet. — 232) In einen geraden Kegel ist ein gerader Cylinder konstruiert, dessen Mantel der dritte Teil des Kegelmantels ist. Wenn die Seitenlinie (4) und die Höhe (3) des Kegels gegeben ist, wie gross ist die Höhe des Cylinders? — 233) Wie gross ist der Mantel eines geraden Kegelstumpfes, dessen Axenschnitt gleich  $g^2$  ist, und dessen Seitenlinie doppelt so lang als die Höhe ist? — 234) Wie verhält sich der Mantel eines geraden Kegels, dessen Axenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, zu dem Mantel eines ebenso hohen Cylinders, dessen Axenschnitt ein Quadrat ist? — 235) Wie gross ist der Mantel eines geraden Kegelstumpfes,



wenn die grössere Grundfläche,  $h_1$  und  $\beta$  gegeben sind? — 236) Wie gross ist der Mantel eines geraden Kegelstumpfes, wenn die Differenz der Grundflächen, das Verhältniss ihrer Umfänge und  $\beta$  gegeben sind?

Im geraden Kegel oder Kegelstumpf soll berechnet werden das Volumen  $\mathfrak{V}$  aus 237)  $r, h$ , 238)  $r, s$ , 239)  $r, f^2$ , 240)  $s, f^2$ , 241)  $h, f^2$ , 242)  $r, \alpha$ , 243)  $s, \beta$ , 244)  $r, \varrho, h_1$ , 245)  $r, \varrho, s_1$ , 246)  $r^2\pi, h_1, \beta$ , 247)  $f_1^2, h_1, s_1$ , aus der Gesamtoberfläche und 248)  $r$ , 249)  $s$ , 250)  $h$ , 251) aus  $r$ , wenn der Axenschnitt des Kegels ein gleichseitiges Dreieck ist, 252) aus dem Inhalt des Axenschnittes des Kegels und dem Inhalt seiner Grundfläche, 253) aus der Grundfläche, wenn der Mantel des Kegels, in eine Ebene aufgerollt, einen Sektor mit dem Centriwinkel  $\frac{2}{3}R$  liefert, 254) aus  $f_1^2$  und  $\beta$ , wenn die Grundflächen des Kegelstumpfes sich wie  $m^2 : n^2$  verhalten, 255) aus  $f_1^2, s_1, \beta$ ,

256)  $r$  aus  $\mathfrak{V}, h$ , 257)  $h$  aus  $\mathfrak{V}, r$ , 258)  $f^2$  aus  $\mathfrak{V}, r$ , 259)  $f^2$  aus  $\mathfrak{V}, h$ , 260)  $\varrho$  aus  $\mathfrak{V}, r, h_1$ , 261)  $h_1$  aus  $\mathfrak{V}, r, \varrho$ , 262)  $r, \varrho$  aus  $\mathfrak{V}, h_1, (r : \varrho)$ , 263)  $r, \varrho$  aus  $\mathfrak{V}, h_1, (r - \varrho)$ , 264)  $h, r$  aus  $\mathfrak{V}$  und der Gesamtoberfläche, 265)  $\beta$  aus  $\mathfrak{V}$  und dem Inhalt des Axenschnittes des Kegels, 266)  $\beta$  aus  $f_1^2, (r - \varrho), (r : \varrho)$ .

Im schiefen Kegel oder Kegelstumpf soll berechnet werden das Volumen  $\mathfrak{V}$  aus 267)  $s, \sigma, r$ , 268)  $s, \sigma, a$ , 269)  $s_1, \sigma_1, r, \varrho$ , 270)  $s, \beta$  und dem Winkel  $(sa)$ , 271)  $h$ , wenn der Kegel einer dreiseitigen Pyramide umbeschrieben ist, deren Grundfläche durch die Stücke  $a, b, \gamma$  bestimmt ist, 272)  $h$ , wenn der Kegel einer vierseitigen Pyramide umbeschrieben ist, deren Grundkanten  $a, b, c, d$  sind, 273)  $s, \sigma$ , wenn der Grundkreis einem Dreieck umbeschrieben ist, von dem  $c$  und  $\gamma$  gegeben sind, 274)  $r, h, \alpha$ , 275)  $r, \alpha$  und dem Verhältniss, in welchem  $2r$  durch  $h$  geteilt wird, 276)  $s, \sigma, \varphi$ , 277)  $a, \varphi$ , wenn die Grundfläche einem Rechteck mit den Seiten  $d, e$  umbeschrieben ist,

278)  $r, \varrho$  aus  $\mathfrak{V}, f_1^2, h_1$ .

279) Wie gross ist der Centriwinkel eines Sektors, der durch Zusammenrollen den Mantel eines Kegels mit dem Volumen  $\mathfrak{V}$  und der Höhe  $h$  liefert? — 280) Wie verhalten sich die Mäntel und wie die Volumina zweier Kegel, welche entstehen, wenn ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten  $a$  und  $b$  einmal um  $a$ , und das andre Mal um  $b$  sich dreht? — 281) Wie verhalten sich die Volumina eines geraden Kegels, dessen Axenschnitt ein gleichseitiges Dreieck, und eines gera-



den Cylinders, dessen Axenschnitt ein Quadrat ist, bei gleicher Mantelfläche? — 282) Wie verhalten sich die Volumina zweier Kegel, welche einem regelmässigen Tetraeder um- und eingeschrieben sind? — 283) Aus einem geraden Cylinder ist ein gerader Kegel, welcher mit ihm dieselbe Grundfläche und Höhe hat, herausgeschnitten. Der übrig gebliebene Körper soll durch eine Cylinderfläche, welche mit der gegebenen dieselbe Axe hat, halbiert werden. Wie gross ist der Radius der halbierenden Fläche, wenn der der gegebenen  $r$  ist? — 284) Ein gerader Kegel, von dem  $r$  und  $h$  gegeben sind, soll durch eine gerade Cylinderfläche, welche dieselbe Axe mit ihm hat, halbiert werden. Wie gross müssen Radius und Höhe der Cylinderfläche sein? — 285) Ueber einem Kreise mit dem Radius  $r$  sind zwei gerade Kegel errichtet, deren Spitzen um die Strecke  $d$  von einander entfernt sind ( $d = h - h'$ ). Wie gross ist der von den Kegelflächen eingeschlossene Raum, und wie gross sind die Seiten der Kegel, wenn der Winkel an der Spitze des grösseren Kegels  $\alpha$  ist? — Ueber einem Kreise ist ein gerader Cylinder und ein um das Volumen  $v^3$  kleinerer gerader Kegel von derselben Höhe errichtet. Wie gross ist 286) der Mantel des Kegels, wenn der Winkel an seiner Spitze  $\alpha$  ist, 287) die Grundfläche des Kegels, wenn die Oberfläche des Körpers, der nach Entfernung des Kegels übrig bleibt,  $g^2$  ist? — 288) Wie verhält sich das Volumen eines geraden Cylinders zu dem eines geraden Kegels, wenn ihre Mäntel sich wie  $m^2 : n^2$  verhalten, ihre Höhen gleich sind und vom Kegel  $\beta$  gegeben ist? — 289) Wie verhalten sich die Mäntel eines geraden Kegels, dessen Axenschnitt ein gleichseitiges Dreieck, und eines geraden Cylinders, dessen Axenschnitt ein Quadrat ist, bei gleichem Volumen? — 290) In ein dreiseitiges Prisma, von welchem Umfang und Inhalt der Grundfläche und die Höhe gegeben sind, ist ein Cylinder beschrieben. Wie gross ist Grundfläche und Höhe eines geraden Kegels, dessen Axenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, und der mit diesem Cylinder gleiches Volumen hat? — 291) Aus einem geraden Kegel, von welchem  $r$  und  $\beta$  bekannt sind, ist ein Kegel herausgeschnitten, dessen Seitenlinien denen des ersten parallel sind. Wie gross ist das Volumen der übrig bleibenden Schicht, wenn dieselbe überall die Dicke  $d$  hat? — 292) Von der in voriger Aufgabe beschriebenen Schicht ist das Volumen, die Höhe des grösseren Kegels, und die Differenz der Radien beider Kegel gegeben; wie gross sind diese Radien? — 293) Dieselbe Aufgabe, wenn



von der Schicht das Volumen, die Dicke und der Winkel  $\beta$  gegeben ist. — 294) Ein Kegel ist durch drei der Grundfläche parallele Ebenen in vier gleiche Teile geteilt. Wie verhalten sich die Höhen dieser Teile zu einander? — 295) Dieselbe Aufgabe, wenn die Teile (von der Spitze angefangen) sich wie  $1 : 3 : 7 : 8$  verhalten. — 296) Ein Kegelstumpf, von dem  $r, \varrho, h_1$  gegeben sind, soll durch eine den Grundflächen parallele Ebene halbiert werden. Wie gross ist die Fläche des halbierenden Kreises, und die Höhen der beiden Teile? — 297) Von einem geraden Kegel ist  $h$  und  $r$  gegeben. Ein anderer, dem ersten nicht kongruenter, gerader Kegel hat mit ihm gleiches Volumen und gleiche Mantelfläche. Wie gross sind Höhe und Radius des zweiten Kegels? — 298) Von einem geraden Kegel ist  $r$ , von einem geraden Cylinder  $h$  gegeben. Wenn dann die Mantelflächen beider Körper gleich sind und ihre Volumina sich wie  $m^3 : n^3$  verhalten, wie gross ist im Kegel  $\alpha$ ? — 299) Der Mantel eines geraden Kegels ist  $f^2$ , der eines ihm einbeschriebenen geraden Cylinders  $f_1^2$ . Wenn dann die Höhen beider Körper sich wie  $m : n$  verhalten, wie gross ist im Kegel  $\alpha$ ?

#### 4. Die Kugel.

*Aufgaben.* — 300) Um ein regelmässiges Tetraeder ist eine Kugel, und in den äusseren Raum zwischen der Oberfläche der letzteren und einer Tetraederfläche ist die grösste, beide Flächen berührende Kugel beschrieben. Wie verhält sich der Radius dieser letzteren Kugel zum Radius der dem Tetraeder einbeschriebenen? — 301) Um ein gerades regelmässiges dreiseitiges Prisma, dessen Seitenflächen zusammen gleich der Summe der Grundflächen sind, ist eine Kugel beschrieben. Wie gross ist der Radius derselben, wenn eine Grundkante des Prismas  $a$  ist? — 302) In jeder Grundfläche eines geraden Cylinders mit dem Radius  $r$  ist ein Durchmesser so gezogen, dass die beiden durch diese Durchmesser gehenden Axenschnitte auf einander senkrecht stehen. Wenn  $AB$  und  $CD$  diese Durchmesser sind, und noch die Strecke  $AC$  bekannt ist, wie gross ist der Radius der Kugel, welche durch die vier Punkte  $A, B, C, D$  geht, und wie gross ist die Oberfläche des Tetraeders  $\overline{ABCD}$ ? — 303) Auf einer Ebene liegen vier gleiche Kugeln so, dass ihre Mittelpunkte ein Quadrat bilden und jede zwei der anderen berührt. Eine fünfte von gleicher Grösse liegt so auf ihnen, dass sie alle vier berührt. Wie weit ist der



Mittelpunkt der fünften von der Ebene entfernt, wenn der Radius jeder Kugel  $r$  ist? — 304) In einem Würfel mit der Kante  $a$  liegen zwei Kugeln, deren Radien sich wie  $m:n$  verhalten, so, dass jede die andere und drei Würfel Flächen berührt. Wie gross sind die Radien der Kugeln? — 305) Eine Halbkugel und ein gerader Kegel, dessen Höhe doppelt so gross ist als der Radius  $r$  der ersteren, haben denselben Kreis als Grundfläche. Wie gross ist der Kreis, in welchem sich ihre Mäntel schneiden, und wie gross ist sein Abstand von der Grundfläche? — 306) Auf der Grundfläche eines Würfels liegen vier gleich grosse Kugeln, von denen jede die zwei benachbarten und drei Würfel Flächen berührt. Wie gross sind die Radien der grössten und der kleinsten innerhalb des Würfels liegenden Kugel, welche die vier andern Kugeln berührt? — 307) Wie gross muss die Höhe eines geraden Kegelstumpfes mit den Radien  $r$  und  $\rho$  sein, damit sich in denselben eine Kugel beschreiben lässt, welche beide Grundflächen und den Mantel berührt?

308) Wie gross ist Seitenlinie, Höhe, Radius, Mantel und Volumen eines geraden Kegels, von welchem  $\alpha$  bekannt ist, und welcher einer Kugel vom Radius  $r$  einbeschrieben ist? — 309) Aus der Oberfläche einer Kugel ihr Volumen zu berechnen. — 310) Aus dem Volumen einer Kugel ihre Oberfläche zu berechnen. — 311) Wie gross ist die Oberfläche einer Kugel, deren Volumen gleich der Summe der Volumina zweier anderer Kugeln von gegebener Oberfläche ist? — 312) Wie verhalten sich die Volumina eines Kegels, einer Halbkugel und eines Cylinders zu einander, wenn der Radius der Grundfläche und die Höhe im Kegel und Cylinder dem Radius der Halbkugel gleich sind? — 313) Wie verhalten sich die krummen Oberflächen der drei in voriger Aufgabe beschriebenen Körper? — 314) Wie verhalten sich die Volumina und die Oberflächen einer Kugel, des ihr umbeschriebenen geraden Cylinders, und desjenigen ihr umbeschriebenen geraden Kegels, dessen Axenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist? — 315) Wie gross ist das Volumen einer Kugel, in welcher ein Schnittkreis, dessen Abstand vom Mittelpunkte gleich  $a$  ist, den Umfang  $u$  hat? — 316) Eine Kugel mit dem Radius  $r$  soll in einen geraden Kegel verwandelt werden, dessen Axenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist. Wie gross wird die Höhe desselben sein? — 317) Welchen Radius hat die Grundfläche eines geraden Cylinders, der mit einer Kugel von gegebener Ober-



fläche ( $f^2$ ) gleiches Volumen hat, und dessen Mantel der Oberfläche der Kugel gleich ist? — 318) Die Grundfläche eines geraden Cylinders ist gleich einem grössten Kreise einer Kugel, die Gesamtoberfläche des Cylinders verhält sich zur Kugel-  
fläche wie  $m:n$ , wie verhalten sich die Volumina beider Körper? Für welchen Wert von  $m:n$  sind dieselben einander gleich? — 319) Ein gerader Kegel, dessen Höhe sich zum Radius der Grundfläche wie  $m:n$  verhält, hat mit einer Kugel, deren Radius  $\varrho$  ist, gleiches Volumen. Wie gross ist im Kegel  $r$  und  $h$ ? Wie gross muss  $m:n$  sein, damit  $r = \varrho$  sei? — 320) Durch eine Kugel mit dem Radius  $r$  ist im Abstand  $a$  vom Mittelpunkt eine Ebene gelegt, und in jede der beiden Kugelkappen die grösste Kugel konstruiert, welche die erste Kugel und die Schnittebene berührt. Wie verhält sich die Summe der Volumina der inneren Kugeln zum Volumen der gegebenen? — 321) Durch eine Kugel ist ein ebener Schnitt gelegt, welcher den zu ihm senkrechten Radius im Verhältnis  $m:n$  teilt. Ueber der Schnittfläche sind zwei gerade Kegel konstruiert, deren Spitzen auf der Oberfläche der Kugel liegen. Wie verhält sich das Volumen des entstandenen Doppelkegels zum Volumen der Kugel? — 322) Um eine Kugel mit dem Radius  $r$  soll ein Kegelstumpf beschrieben werden, dessen Volumen das  $m$ -fache von dem der Kugel ist. Wie gross sind die Radien seiner Grundflächen zu nehmen? (Specieller Fall  $m = n$ .) — 323) Dieselbe Aufgabe, wenn statt des Volumens der Mantel des Kegelstumpfes das  $m$ -fache von der Oberfläche der Kugel sein soll. (Specieller Fall  $m = 1$ .) — 324) Wie gross ist der Mantel eines geraden Kegels, von welchem  $\beta$  gegeben ist, und dessen Volumen gleich dem einer Kugel mit dem Radius  $\varrho$  ist. — 325) In eine Kugel, deren Volumen  $\mathfrak{B}$  ist, ist ein regelmässiges Tetraeder beschrieben, in dieses eine zweite Kugel, in diese ein zweites Tetraeder, u. s. f. ins Unendliche. Wie gross ist die Summe der Volumina aller Kugeln und die aller Tetraeder? — 326) Dieselbe Aufgabe, wenn statt der Tetraeder Würfel konstruiert werden. — 327) Dieselbe Aufgabe, wenn regelmässige Oktaeder konstruiert werden. — 328) Wie gross ist der Winkel  $\alpha$  an der Spitze einer Kegel-  
fläche, wenn die Volumina zweier Kugeln, welche der Kegel-  
fläche so einbeschrieben sind, dass sie einander von aussen berühren, sich wie  $m^3:n^3$  verhalten? — 329) Um eine Kugel ist ein gerader Kegel beschrieben, dessen Axenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist. Wie verhalten sich die krummen Ober-



flächen und die Volumina beider Körper zu einander? — 330) In eine Kugel mit dem Radius  $r$  ist ein gerader Kegel beschrieben, dessen Grundfläche der  $n^{\text{te}}$  Teil eines grössten Kugelkreises ist. Wie verhalten sich die Volumina beider Körper zu einander? — 331) In eine Kugel ist ein gerader Kegel so einbeschrieben, dass seine Höhe durch den Kugelmittelpunkt nach dem goldenen Schnitt geteilt wird. Wie verhalten sich die Volumina beider Körper zu einander? — 332) Die Dicke einer Hohlkugel ist  $a$ , der Radius der äusseren Kugelfläche  $r$ ; wie gross ist der Radius einer Kugel, welche mit der Hohlkugel gleiches Volumen hat? — 333) In eine Kugel mit dem Radius  $r (= \sqrt{5})$  ist ein gerader Cylinder beschrieben, dessen Gesamtoberfläche halb so gross als die Oberfläche der Kugel ist. Wie gross ist Radius und Höhe des Cylinders?

Wie gross ist das Volumen eines Kugelkegels, wenn gegeben ist 334) Höhe und Radius des zugehörigen Kegels, 335) Kugelradius und Winkel an der Spitze des Kegels?

Wie gross ist das Volumen einer Kugelkappe, wenn gegeben ist 336) der Inhalt ihrer krummen Fläche und der Abstand ihres Grundkreises vom Kugelmittelpunkt, 337) ihre Höhe und die Oberfläche der ganzen Kugel, 338) der Kugelradius, und die Bedingung, dass die krumme Fläche der Kappe viermal so gross sein soll als die ebene. Wie gross ist ferner die Höhe der Kugelkappe?

339) Wenn das Volumen und die Höhe einer Kugelkappe gegeben ist, wie gross ist dann der Kugelradius? — 340) Um ein regelmässiges Tetraeder ist eine Kugel beschrieben. In welchem Verhältnis wird dieselbe durch eine erweiterte Tetraederfläche geteilt? — 341) Dieselbe Aufgabe, wenn statt des Tetraeders ein Würfel gesetzt wird. — 342) Dieselbe Aufgabe für das regelmässige Oktaeder. — 343) In eine Kugel mit dem Radius  $r (= \sqrt{2})$  ist ein Cylinder konstruiert, dessen Axenschnitt ein Quadrat ist. Wie gross sind die vier Stücke, in welche die Kugel durch die Oberfläche des Cylinders geteilt wird? — 344) Zwei gleiche Kugelflächen schneiden einander so, dass der Mittelpunkt der einen auf der andern liegt. Wie gross ist der beiden Kugeln gemeinsame Körper?

345) Wie gross ist das Volumen einer Kugelzone, wenn ihre Höhe, der Kugelradius, und der Abstand ihres grösseren Grundkreises vom Kugelmittelpunkt gegeben ist? — 346) Von einer Kugelzone sind die Radien ihrer Grundkreise und ihre



Höhe gegeben. Wie gross ist ihre krumme Oberfläche und ihr Volumen? — 347) Von einer Kugelzone ist der Radius ihres grösseren Grundkreises, ihre Höhe und der Kugelradius gegeben; wie gross ist ihre krumme Oberfläche und ihr Volumen? — Wenn die Erde als Kugel mit dem Radius 858 Meilen betrachtet wird, wie gross ist dann 348) die Oberfläche der vom 60. Parallelkreise begrenzten kleineren Kugelkappe, 349) die Oberfläche der zwischen dem 50. und 60. Parallelkreise liegenden Zone? 350) Wie hoch ist ein Berg, den man im flachen Lande 17 Meilen weit sieht? 351) Wie weit ist ein Leuchtturm von 120 Fuss Höhe auf See sichtbar? (1 Meile = 24000 Fuss. 352) Wie weit sind zwei Orte auf demselben Meridian von einander entfernt, wenn die Sonne an dem einen  $84^{\circ}$  hoch, an dem andern im Zenith steht?

353) Wie gross ist der Mantel eines Kegels, von welchem  $\beta$  bekannt ist, wenn sein Volumen gleich dem einer Kugel mit dem Radius  $\rho$  ist? — 354) Um einen Würfel mit der Oberfläche  $f^2$  ist eine Kugel beschrieben. Wie gross ist ihr Volumen und ihre Oberfläche? — 355) In eine Kugel mit dem Volumen  $\mathfrak{B}$  ist ein gerader Cylinder mit der Mantelfläche  $f^2$  beschrieben. Wie gross ist sein Volumen? — 356) In eine Kugel mit der Oberfläche  $f^2$  ist ein gerader Kegel beschrieben, von welchem  $\alpha$  gegeben ist. Wie gross ist sein Mantel und sein Volumen? — 357) In einen geraden Kegel, von welchem  $\mathfrak{B}$  und  $h$  gegeben sind, ist eine Kugel beschrieben. Wie gross ist ihr Volumen und ihre Oberfläche?

358) Wieviel Meilen misst ein Grad des Breitenkreises unter  $53\frac{1}{2}$  Grad Breite, wenn ein Grad des Aequators 15 Meilen lang ist, und die Erde als Kugel betrachtet wird. — 359) Unter welcher Breite misst ein Grad des Breitenkreises  $7\frac{1}{2}$  Meilen? — 360) Wie gross ist das Volumen einer Kugel, wenn von einem auf ihr liegenden Kugeldreieck die Fläche und die Winkel gegeben sind? — 361) Wie gross ist die Fläche eines Kugeldreiecks, von welchem der Kugelradius und die Winkel gegeben sind?

## 5. Rotationskörper.

*Aufgaben.* — Wie gross ist Oberfläche und Volumen des Körpers, welcher entsteht, wenn rotiert 362) ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite  $a$  um eine seiner Seiten, 363) ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite  $a$  um eine in der Entfernung  $d$  zu einer seiner Seiten parallel gezogene Gerade,



364) ein beliebiges Dreieck um eine ausserhalb desselben liegende Axe, wobei zwei Seiten des Dreiecks und die Abstände seiner Ecken von der Axe gegeben sind? — Wie gross ist das Volumen des Körpers, welcher entsteht, wenn rotiert 365) ein regelmässiges Sechseck mit der Seite  $a$  um einen grossen Durchmesser, 366) dieselbe Figur um einen kleinen Durchmesser, 367) ein Sektor mit dem Radius  $r$  und dem Centriwinkel  $\alpha$  um einen zur Sehne seines Bogens parallelen Durchmesser, 368) in voriger Aufgabe das Segment statt des zugehörigen Sektors, 369) ein Segment mit dem Radius  $r$  und der Sehne  $a$  um einen ausserhalb des Segments liegenden Durchmesser, welcher mit der Sehne den Winkel  $\varphi$  bildet (specieller Fall  $\varphi = 0$ ), 370) ein Dreieck mit den Stücken  $\alpha, \beta, \gamma$  um die Seite  $a$ , 371) ein Trapez, dessen parallele Seiten und Winkel gegeben sind, um eine der parallelen Seiten, 372) ein Parallelogramm von gegebener Fläche um eine ausserhalb desselben liegende Axe, deren Entfernung von seinem Mittelpunkte  $d$  ist, 373) ein Dreieck mit den Stücken  $a, b, \gamma$  um eine Axe, die in  $B$  auf  $a$  senkrecht steht.

## 6. Vermischte Aufgaben.

374) Wie gross ist das Volumen eines Cylinders, der einem dreiseitigen Prisma umschrieben ist, wenn von dem letzteren das Volumen nebst zwei Winkeln der Grundfläche gegeben ist? — 375) Ein gerader Cylinder soll durch Wegnahme einer überall gleich dicken Schicht unter Beibehaltung seiner Höhe auf die Hälfte seines Volumens reduziert werden. Wie dick muss die Schicht sein? — 376) Wie gross ist das Volumen und die Oberfläche einer geraden quadratischen Pyramide, deren Kanten alle gleich  $a$  sind, und die in eine Kugel mit dem Radius  $r$  beschrieben ist? — 377) Von der Grundfläche eines geraden dreiseitigen Prismas sind die Stücke  $\alpha, \beta, \gamma$  gegeben, während seine Höhe gleich dem Radius des Umkreises der Grundfläche ist. Wie gross ist der Mantel des dem Prisma einbeschriebenen Cylinders? — 378) Um eine Kugel mit dem Radius  $q$  ist ein gerader Kegel beschrieben, dessen Volumen sich zu dem der Kugel wie  $p : q$  verhält. Wie gross ist sein Radius und seine Höhe? — 379) In ein Tetraeder, von welchem alle Kanten gegeben sind, ist eine Kugel beschrieben. Wie gross ist der Radius derselben? — 380) Wie gross ist das Volumen eines Kubooktaeders, von welchem die Kante  $a$



gegeben ist? (S. A. 62.) — 381) Wie gross ist das Volumen eines regelmässigen Oktaeders, welches einer Kugel mit dem Radius  $\rho$  umbeschrieben ist? — 382) In einen Würfel ist ein regelmässiges Tetraeder so konstruiert, dass ein Eckpunkt des letzteren auf einen Eckpunkt des ersteren fällt, und die drei anderen Tetraederecken auf den von der gegenüberliegenden Würfecke ausgehenden Diagonalen der Seiten liegen. Wie verhalten sich die Volumina beider Körper zu einander?

Die folgenden Aufgaben führen auf Gleichungen dritten Grades:

383) Ein gerader Kegel, von dem  $r$  und  $h$  gegeben ist, soll in einen anderen verwandelt werden, welcher doppelte Mantelfläche hat. Wie gross ist Radius und Höhe des neuen Kegels? — 384) Wie gross ist die Höhe einer Kugelkappe, wenn ihr Volumen und der Kugelradius gegeben ist? — 385) In eine Kugel mit dem Radius  $\rho$  soll ein Kegel von gegebenem Volumen beschrieben werden. Wie gross sind Radius und Höhe desselben? — 386) In einen Kegel soll ein Cylinder von gegebenem Volumen beschrieben werden. Wie gross sind Radius und Höhe desselben? — 387) Von einem geraden Kegel ist Mantel und Volumen gegeben, wie gross ist sein Radius und seine Höhe? — 388) Eine Kugel von gegebener Oberfläche soll durch zwei parallele Ebenen in drei gleiche Teile von gleichem Volumen geteilt werden. In welcher Entfernung vom Mittelpunkte müssen diese Ebenen liegen? — 389) Eine Kugel von gegebenem Radius soll durch parallele Ebenen in vier Teile von gleichem Volumen geteilt werden. Welche Höhe haben die beiden entstehenden Kugelkappen? — 390) Ueber der oberen Grundfläche eines geraden Cylinders von gegebener Höhe ist eine Halbkugel konstruiert. Welches Volumen hat dieselbe, wenn das Volumen des Gesamtkörpers gegeben ist?



## Sphärische Trigonometrie.

## Tafel rechtwinkliger und schiefwinkliger Kugeldreiecke.

| Nr. | $a$        | $b$        | $c$         | $\alpha$   | $\beta$    | $\gamma$    |
|-----|------------|------------|-------------|------------|------------|-------------|
| 1   | 2. 41. 10  | 14. 17. 12 | 14. 31. 55  | 10. 45. 52 | 79. 34. 20 | 90. 0. 0    |
| 2   | 4. 2. 50   | 44. 17. 5  | 44. 25. 52  | 5. 47. 11  | 85. 51. 40 | 90. 0. 0    |
| 3   | 5. 42. 30  | 55. 18. 41 | 55. 30. 28  | 6. 55. 53  | 86. 3. 42  | 90. 0. 0    |
| 4   | 69. 12. 10 | 44. 24. 26 | 75. 18. 23  | 75. 6. 59  | 46. 20. 12 | 90. 0. 0    |
| 5   | 83. 6. 15  | 20. 23. 11 | 83. 32. 17  | 87. 35. 15 | 20. 31. 21 | 90. 0. 0    |
| 6   | 65. 1. 30  | 30. 48. 9  | 68. 44. 10  | 76. 35. 5  | 33. 19. 55 | 90. 0. 0    |
| 7   | 32. 38. 10 | 49. 5. 20  | 56. 31. 51  | 40. 16. 43 | 64. 57. 5  | 90. 0. 0    |
| 8   | 25. 13. 12 | 37. 14. 9  | 58. 31. 51  | 18. 37. 50 | 26. 58. 46 | 140. 14. 50 |
| 9   | 97. 12. 25 | 54. 18. 16 | 124. 12. 31 | 72. 26. 40 | 51. 18. 13 | 127. 22. 3  |
| 10  | 88. 12. 19 | 27. 16. 8  | 93. 44. 45  | 78. 43. 30 | 26. 42. 52 | 101. 44. 20 |
| 11  | 26. 11. 15 | 42. 18. 17 | 53. 19. 34  | 32. 25. 57 | 54. 52. 50 | 102. 55. 3  |
| 12  | 82. 33. 51 | 27. 16. 9  | 89. 12. 24  | 75. 11. 22 | 26. 31. 57 | 102. 52. 9  |
| 13  | 31. 31. 30 | 64. 19. 21 | 82. 11. 17  | 27. 17. 17 | 52. 12. 27 | 119. 41. 37 |
| 14  | 20. 19. 18 | 21. 17. 51 | 19. 12. 11  | 61. 0. 52  | 66. 11. 0  | 55. 56. 29  |
| 15  | 55. 36. 19 | 77. 12. 17 | 63. 9. 41   | 57. 42. 14 | 92. 36. 47 | 66. 4. 17   |
| 16  | 42. 19. 31 | 65. 12. 10 | 83. 44. 19  | 39. 46. 11 | 59. 35. 34 | 109. 11. 59 |
| 17  | 89. 59. 59 | 88. 58. 58 | 87. 57. 57  | 90. 2. 9   | 88. 58. 56 | 87. 57. 56  |

*Formeln.* — a) *Rechtwinkliges Kugeldreieck.* — 391.  $\operatorname{tg}^2 \alpha/2 = \sin(c-b) : \sin(c+b)$ . — 392.  $\operatorname{tg}^2 \alpha/2 = \operatorname{tg} 1/2(c+b) \cdot \operatorname{tg} 1/2(c-b)$ . — 393.  $\operatorname{tg}^2 c/2 = -\cos(\alpha + \beta) : \cos(\alpha - \beta)$ . — 394.  $\sin^2 a \cdot \cos^2 b = \sin(c-b) \cdot \sin(c+b)$ . — 395.  $\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 c = \sin(c-a) \cdot \sin(c+a)$ . — 396.  $\cos^2 c \cdot \sin^2 \alpha = \sin(\alpha - a) \cdot \sin(\alpha + a)$ . — 397.  $\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 b \cdot \sin^2 c = \sin(c-b) \cdot \sin(c+b)$ . — 398.  $\cos^2 a \cdot \cos^2 \beta = \sin(\alpha - a) \cdot \sin(\alpha + a)$ . — 399.  $\sin^2 a + \sin^2 b - \sin^2 c = \sin^2 a \cdot \sin^2 b$ . — 400.  $\cos^2 \alpha + \cos^2 c - \cos^2 a = \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 c$ . — 401.  $\sin^2 \alpha = \cos^2 \beta + \sin^2 a \cdot \sin^2 \beta$ . — 402.  $\operatorname{tg} a \cdot \cos c = \sin b \cdot \cot \beta$ . — 403.  $2 \cdot \cos^2 \alpha/2 \cdot \cos b \cdot \sin c = \sin(b+c)$ . — 404.  $2 \cdot \sin^2 \alpha/2 \cdot \cos b \cdot \sin c = \sin(c-b)$ . — 405.  $\cot \alpha \cdot \cot \beta = \cos a \cdot \cos b$ . — 406.  $\sin(\alpha + b) \cdot \operatorname{tg} 1/2(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - b) \cdot \cot 1/2(\alpha - \beta)$ .

b) *Schiefwinkliges Kugeldreieck.* — 407.  $\sin^2 \alpha = (4 \sin p \cdot \sin p_1 \cdot \sin p_2 \cdot \sin p_3) : (\sin^2 b \cdot \sin^2 c)$ . — 408.  $\sin^2 a = -(4 \cos \pi \cdot \cos \pi_1 \cdot \cos \pi_2 \cdot \cos \pi_3) : (\sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma)$ . — 409.  $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin b \cdot \sin \gamma \cdot \cot \alpha$ . — 410.  $\cos a \cdot \sin c = \sin a \cdot \cos c \cdot \cos \beta + \sin b \cdot \cos \alpha$ . — 411.  $2 \cdot \cos 1/2(\alpha + b) \cdot \cos 1/2(\alpha - b) \cdot \operatorname{tg} 1/2 c = \sin b \cdot \cos \alpha + \sin a \cdot \cos \beta$ . — 412.  $\operatorname{tg} 1/2(\alpha - a) \cdot \operatorname{tg} 1/2(\beta + b) = \operatorname{tg} 1/2(\beta - b) \cdot \operatorname{tg} 1/2(\alpha + a)$ . — 413.  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin b \cdot \sin \alpha \cdot \cot \beta \pm \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 b \cdot \sin^2 \alpha}$ . — 414.  $(\cos 2\alpha - \cos 2\beta)$



$-(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) = \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta - \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta.$  — 415.  
 $\operatorname{tg} \alpha/2 \cdot \operatorname{tg} \beta/2 = \sin p_3 : \sin p.$  — 416.  $\operatorname{tg} \alpha/2 \cdot \cot \beta/2 = \sin p_2 : \sin p_1.$  —  
 417.  $\sin p \cdot \sin p_1 + \sin p_2 \cdot \sin p_3 = \sin b \cdot \sin c.$  — 418.  $\sin^2 \alpha \cdot$   
 $\sin \beta \cdot \sin \gamma = 4 \cdot \sin^2 \alpha/2 \cdot \sin p \cdot \sin p_1.$  — 419.  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\beta + \gamma) +$   
 $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 2 \cot \alpha/2 \cdot \sin b : \sin (b + c).$  — 420.  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$   
 $- \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 2 \cot \alpha/2 \cdot \sin c : \sin (b + c).$

Aufgaben. — *Berechnung von Dreiecken.* — Gegeben: 421)  
 $\alpha, b, \alpha + \beta.$  — 422)  $\alpha + b, \alpha + \beta, \gamma.$  — 423)  $\alpha + b, c, \gamma.$  —  
 424)  $\alpha, \beta, \varrho.$  — 425)  $\alpha, b, \varrho.$  — 426)  $\alpha, \beta, p.$  — 427)  $\alpha + \beta, \gamma, p.$

428) Von zwei Punkten der Erdoberfläche kennt man  
 Länge und Breite. Wie gross ist der zwischen ihnen liegende  
 kleinere Bogen des durch sie bestimmten grössten Kugel-  
 kreises? — 429) Von drei Punkten der Erdoberfläche, die  
 nicht auf demselben Diametralkreise liegen, kennt man Länge  
 und Breite. Wie gross ist die Fläche des zwischen ihnen lie-  
 genden Kugeldreiecks?

430) Wie gross ist das Volumen einer Säule, von welcher  
 drei Kanten und die Winkel, welche sie mit einander bilden,  
 gegeben sind? — 431) Wie gross sind die Raumwinkel eines  
 Tetraeders, von welchem drei von einer Ecke ausgehende  
 Kanten und die Winkel, welche sie mit einander bilden, ge-  
 geben sind? — 432) Wie gross sind die Seiten und Winkel  
 einer Ecke eines Tetraeders, von welchem die sechs Kanten  
 gegeben sind? — 433) Von einem schiefen Kegel ist  $a, \varphi, r$   
 und der Winkel gegeben, welchen der Neigungsschenkel einer  
 Seitenlinie mit dem nach dem Fusspunkte dieser Seitenlinie  
 gehenden Radius des Grundkreises bildet. Wie lang ist diese  
 Seitenlinie? — 434) Von einem Kugeldreieck, dessen Fläche  
 $\frac{1}{16}$  von der Oberfläche der Kugel beträgt, sind zwei Winkel  
 nebst dem Kugelradius gegeben. Wie gross sind die Seiten  
 des Dreiecks?



# Register.

|                                                                                                       | Nr. |                                                   | Nr. |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|---------------------------------------------------|-----|
| Asymptotenkegel . . . . .                                                                             | 137 | Drehung der Ebene . . . . .                       | 10  |
| Augenpunkt . . . . .                                                                                  | 2   | Drehungsaxe . . . . .                             | 10  |
| Axe . . . . .                                                                                         | 10  | Durchmesser der Kugelfläche . . . . .             | 22  |
| „ der Kegelfläche . . . . .                                                                           | 14  |                                                   |     |
| „ des Kegels . . . . .                                                                                | 47  | Ebene, antiparallele . . . . .                    | 5   |
| „ der Cylinderfläche . . . . .                                                                        | 15  | „ parallele . . . . .                             | 5   |
| „ des Cylinders . . . . .                                                                             | 59  | „ schneidende . . . . .                           | 10  |
| „ der Fläche 2. Ordnung . . . . .                                                                     | 135 | „ senkrechte . . . . .                            | 18  |
| „ der Säule . . . . .                                                                                 | 55  | Ecke . . . . .                                    | 28  |
| Axenschnitt der Kegelfläche . . . . .                                                                 | 14  | „ flache . . . . .                                | 29  |
| „ des Kegels . . . . .                                                                                | 47  | „ geschlossene . . . . .                          | 29  |
| „ d. Cylinderfläche . . . . .                                                                         | 15  | „ gestreckte . . . . .                            | 29  |
| „ des Cylinders . . . . .                                                                             | 61  | „ gleichschenklige . . . . .                      | 36  |
|                                                                                                       |     | „ gleichseitige . . . . .                         | 36  |
| Berührungskugel des Polyeders . . . . .                                                               | 83  | „ konkave . . . . .                               | 29  |
| „ linie des Kegels . . . . .                                                                          | 48  | „ konvexe . . . . .                               | 29  |
| „ „ „ Cylinders . . . . .                                                                             | 61  | „ rechte . . . . .                                | 29  |
| „ punkt der Kugel . . . . .                                                                           | 78  | „ vielseitige . . . . .                           | 38  |
| Bestimmungspyramide . . . . .                                                                         | 87  | „ des Tetraeders . . . . .                        | 40  |
|                                                                                                       |     | Eckpunkt des Tetraeders . . . . .                 | 40  |
| Centrallinie . . . . .                                                                                | 88  | Ellipsoid . . . . .                               | 136 |
| Centriwinkel der Kugelfläche . . . . .                                                                | 22  | Entfernung . . . . .                              | 20  |
| Cosinussatz . . . . .                                                                                 | 126 | Excess, sphärischer (excessus, sphaera) . . . . . | 113 |
| Cylinder ( $\kappa\acute{\upsilon}\lambda\iota\nu\delta\omicron\varsigma$ ) . . . . .                 | 59  |                                                   |     |
| „ gemeiner . . . . .                                                                                  | 59  | Fläche, zweifach zusammenhän-                     |     |
| „ gerader . . . . .                                                                                   | 59  | gende . . . . .                                   | 120 |
| „ schiefer . . . . .                                                                                  | 59  | „ cylindrische . . . . .                          | 135 |
| „ fläche . . . . .                                                                                    | 15  | „ elliptische . . . . .                           | 135 |
| „ „ elliptische . . . . .                                                                             | 139 | „ windschiefe . . . . .                           | 135 |
| „ „ hyperbolische . . . . .                                                                           | 140 |                                                   |     |
| „ „ parabolische . . . . .                                                                            | 141 | Gegenecke der Säule . . . . .                     | 52  |
|                                                                                                       |     | „ fläche „ „ . . . . .                            | 52  |
| Diagonalaxe der Säule . . . . .                                                                       | 55  | „ kante d. dreiseit. Prismas . . . . .            | 50  |
| „ schnitt d. dreis. Prismas . . . . .                                                                 | 51  | „ „ der Säule . . . . .                           | 52  |
| „ „ der Säule . . . . .                                                                               | 55  | „ punkte d. dreiseit. Prismas . . . . .           | 50  |
| Diametralkreis . . . . .                                                                              | 22  | „ „ der Kugelfläche . . . . .                     | 22  |
| Dodekaeder ( $\delta\acute{\omega}\delta\epsilon\kappa\alpha$ , $\epsilon\delta\omicron\alpha$ ), ho- |     | „ „ der Säule . . . . .                           | 52  |
| mogenes . . . . .                                                                                     | 85  | „ winkel „ „ . . . . .                            | 52  |
| „ regelmässiges . . . . .                                                                             | 87  |                                                   |     |



|                                                                                              | Nr.     |                                                                               | Nr.   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|---------|-------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Gerade, parallele (zur Ebene) . . .                                                          | 8       | Kugelkappe . . . . .                                                          | 77    |
| „ senkrechte „ . . .                                                                         | 18      | „ kegel . . . . .                                                             | 75    |
| „ unendlich ferne . . .                                                                      | 26      | „ zone . . . . .                                                              | 111   |
| „ windschiefe . . .                                                                          | 9       | „ zweieck . . . . .                                                           | 22    |
| Grundfläche des Cylinders . . .                                                              | 59      | „ einbeschriebene . . .                                                       | 83    |
| „ „ Kegels . . .                                                                             | 47      | „ umbeschriebene . . .                                                        | 83    |
| „ „ Prismas . . .                                                                            | 50. 56  | Lage des Raumwinkels . . .                                                    | 12    |
| „ der Pyramide . . .                                                                         | 45      | Leitlinien der Cylinderfläche . . .                                           | 15    |
| „ d. Pyramidenstumpfs . . .                                                                  | 46      | „ der Kegelfläche . . .                                                       | 14    |
| „ der Säule . . .                                                                            | 52      | Mantel des Cylinders . . .                                                    | 59    |
| Grundkante des Prismas . . .                                                                 | 50. 56  | „ des Kegels . . .                                                            | 47    |
| „ der Pyramide . . .                                                                         | 45      | Mittelpunkt der Kugelfläche . . .                                             | 22    |
| „ „ Säule . . .                                                                              | 52      | „ des regelm. Polyeders . . .                                                 | 87    |
| Grundkreis des Cylinders . . .                                                               | 59      | „ der Säule . . .                                                             | 55    |
| „ „ Kegels . . .                                                                             | 47      | Nebenecke . . . . .                                                           | 30    |
| Halbkugel . . . . .                                                                          | 22      | Nebenscheitelecke . . . . .                                                   | 30    |
| Hauptschnitt des Cylinders . . .                                                             | 61      | Nebenstück des Tetraeders . . .                                               | 43    |
| „ d. Fläche 2. Ordn. . . .                                                                   | 135     | Neigungswinkel zweier Ebenen . . .                                            | 17    |
| „ des Kegels . . .                                                                           | 47      | „ zw. Gr. u. Eb. . . . .                                                      | 19    |
| Hauptstück des Tetraeders . . .                                                              | 43      | Neigungsschenkel . . . . .                                                    | 19    |
| Hexaeder ( $\xi\zeta, \xi\delta\rho\alpha$ ) . . .                                           | 52      | Netz des Körpers . . . . .                                                    | 2     |
| „ homogenes . . . . .                                                                        | 85      | Normalschnitt des Cylinders . . .                                             | 61    |
| „ regelmässiges . . . . .                                                                    | 87      | „ des Kegels . . . . .                                                        | 48    |
| Höhe des Cylinders . . . . .                                                                 | 59      | Nullecke . . . . .                                                            | 29    |
| „ „ Kegels . . . . .                                                                         | 47      | Oktaeder ( $\delta\kappa\tau\omega, \xi\delta\rho\alpha$ ), homogenes . . .   | 85    |
| „ „ Prismas . . . . .                                                                        | 56      | „ regelmässiges . . . . .                                                     | 87    |
| „ der Pyramide . . . . .                                                                     | 45      | Paraboloid, elliptisches . . . . .                                            | 138   |
| Höhenebene der Ecke . . . . .                                                                | 81      | „ hyperbolisches . . . . .                                                    | 142   |
| Hyperboloid . . . . .                                                                        | 137     | Parallelepipedon ( $\epsilon\pi\iota\pi\epsilon\delta\omicron\nu$ ) . . .     | 52    |
| Hypotenusenseite . . . . .                                                                   | 41      | Parallelprojection . . . . .                                                  | 2     |
| Ikosaeder ( $\epsilon\iota\kappa\omicron\sigma\iota, \xi\delta\rho\alpha$ ), homogenes . . . | 85      | Pentaeder ( $\pi\epsilon\nu\tau\epsilon, \xi\delta\rho\alpha$ ) . . .         | 49    |
| „ regelmässiges . . . . .                                                                    | 87      | Polardreieck . . . . .                                                        | 38    |
| Kante der Ecke . . . . .                                                                     | 28      | „ ecke . . . . .                                                              | 34    |
| „ des Tetraeders . . . . .                                                                   | 40      | Polyeder ( $\pi\omicron\lambda\upsilon\varsigma, \xi\delta\rho\alpha$ ) . . . | 42    |
| Kathetenseite . . . . .                                                                      | 41      | „ Eulersches . . . . .                                                        | 42    |
| Kegel . . . . .                                                                              | 47      | „ homogenes . . . . .                                                         | 85    |
| „ gemeiner . . . . .                                                                         | 47      | „ konkaves . . . . .                                                          | 42    |
| „ gerader . . . . .                                                                          | 47      | „ regelmässiges . . . . .                                                     | 87    |
| „ schiefer . . . . .                                                                         | 47      | Prisma ( $\pi\rho\iota\sigma\mu\alpha$ ) . . . . .                            | 56    |
| Kegelfläche . . . . .                                                                        | 14      | „ dreiseitiges . . . . .                                                      | 49    |
| „ elliptische . . . . .                                                                      | 137     | „ gerades . . . . .                                                           | 56    |
| Kegelschnitt . . . . .                                                                       | 137     | „ $n$ -seitiges . . . . .                                                     | 56    |
| „ stumpf . . . . .                                                                           | 48      | „ regelmässiges . . . . .                                                     | 56    |
| Kugel . . . . .                                                                              | 75. 136 | „ schiefes . . . . .                                                          | 56    |
| „ ausschnitt . . . . .                                                                       | 75      | „ unregelmässiges . . . . .                                                   | 56    |
| „ dreieck . . . . .                                                                          | 38      | Product von drei Strecken . . .                                               | 92    |
| „ „ rechtwinkliges . . . . .                                                                 | 123     | Projection . . . . .                                                          | 2. 41 |
| „ „ schiefwinkliges . . . . .                                                                | 125     |                                                                               |       |
| „ fläche . . . . .                                                                           | 22      |                                                                               |       |



|                                              | Nr.    |                                               | Nr.    |
|----------------------------------------------|--------|-----------------------------------------------|--------|
| Projectionsebene . . . . .                   | 2      | Seitenkante der Pyramide . . . . .            | 45     |
| Pyramide ( <i>πυραμίδα</i> ) . . . . .       | 45     | „ der Säule . . . . .                         | 52     |
| „ gerade . . . . .                           | 45     | Seitenlinie des Cylinders . . . . .           | 59     |
| „ <i>n</i> -seitige . . . . .                | 45     | „ der Cylinderfläche . . . . .                | 15     |
| „ regelmässige . . . . .                     | 45     | „ des Kegels . . . . .                        | 47     |
| „ schiefe . . . . .                          | 45     | „ der Kegelfläche . . . . .                   | 14     |
| „ unregelmässige . . . . .                   | 45     | Sekantenebene des Cylinders . . . . .         | 61     |
| Pyramidenstumpf . . . . .                    | 46     | „ des Kegels . . . . .                        | 48     |
| Radius des regelm. Polyeders . . . . .       | 87     | „ der Kugel . . . . .                         | 77     |
| „ der Kugelfläche . . . . .                  | 22     | Sinussatz . . . . .                           | 125    |
| Raumstück prismatisches . . . . .            | 27     | Spitze des Kegels . . . . .                   | 47     |
| „ winkel . . . . .                           | 12     | „ der Kegelfläche . . . . .                   | 14     |
| Rhomboeder ( <i>ῥόμβος, ἑδρά</i> ) . . . . . | 54     | „ der Pyramide . . . . .                      | 45     |
| Rotationsellipsoid . . . . .                 | 136    | Sternpolyeder . . . . .                       | 42     |
| „ fläche . . . . .                           | 135    | „ regelmässiges . . . . .                     | 87     |
| „ hyperboloid . . . . .                      | 137    | Tangentenebene des Cylinders . . . . .        | 61     |
| „ körper . . . . .                           | 74     | „ des Kegels . . . . .                        | 48     |
| Säule . . . . .                              | 52     | „ der Kugel . . . . .                         | 78     |
| „ rechteckige . . . . .                      | 54     | Tetraeder ( <i>τέσσαρες, ἑδρά</i> ) . . . . . | 40     |
| „ rhombische . . . . .                       | 54     | „ gleichschenkliges . . . . .                 | 44     |
| „ quadratische . . . . .                     | 54     | „ gleichseitiges . . . . .                    | 44     |
| Scheitel der Ecke . . . . .                  | 28     | „ homogenes . . . . .                         | 85     |
| Scheitelecke . . . . .                       | 30     | „ rechteckiges . . . . .                      | 41     |
| „ linie des Raumwinkels . . . . .            | 12     | „ regelmässiges . . . . .                     | 44. 87 |
| Schenkelebene der Ecke . . . . .             | 28     | Verschiebung der Ebene . . . . .              | 5      |
| „ des Raumwinkels . . . . .                  | 12     | Volumen (volumen) . . . . .                   | 90     |
| Seite der Ebene . . . . .                    | 2      | Winkel der Ecke . . . . .                     | 31     |
| „ der Ecke . . . . .                         | 31     | „ a. d. Spitze d. Kegelfl. . . . .            | 14     |
| „ des Kugeldreiecks . . . . .                | 38     | „ des Kugeldreiecks . . . . .                 | 38     |
| „ des Tetraeders . . . . .                   | 40     | „ des Tetraeders . . . . .                    | 40     |
| Seitenfläche des Prismas . . . . .           | 50. 56 | „ zweier Ebenen . . . . .                     | 12     |
| „ der Pyramide . . . . .                     | 45     | Würfel . . . . .                              | 54     |
| „ der Säule . . . . .                        | 52     | Zweieck . . . . .                             | 22     |
| Seitenkante des Prismas . . . . .            | 50. 56 |                                               |        |

## Berichtigungen.

S. 118. Z. 10 v. u. lies Polyeder statt Polygon.



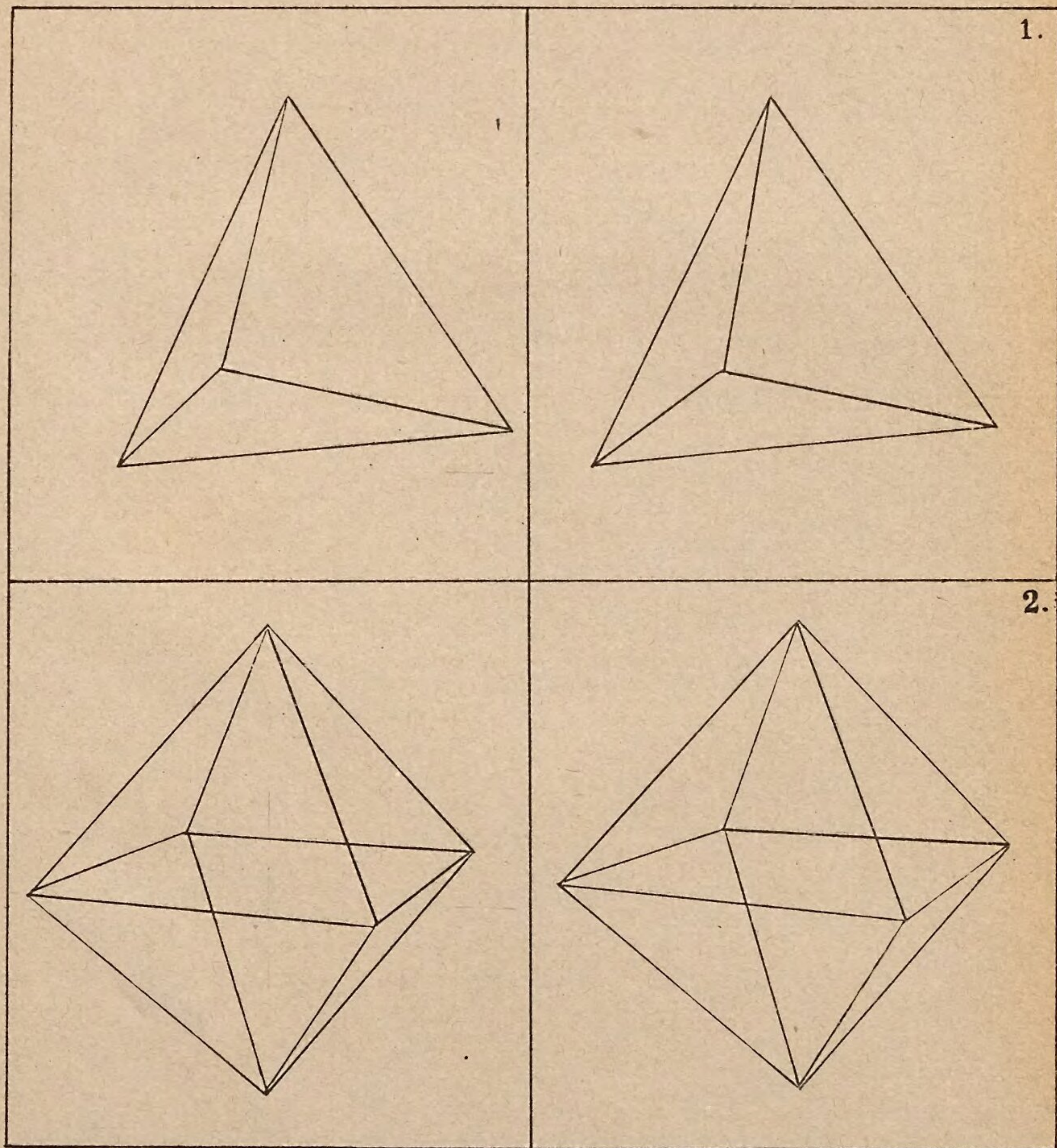
# Stereoskopische Bilder

der  
regelmässigen konkaven Polyeder.

(Nach Dr. Th. Hugel.)

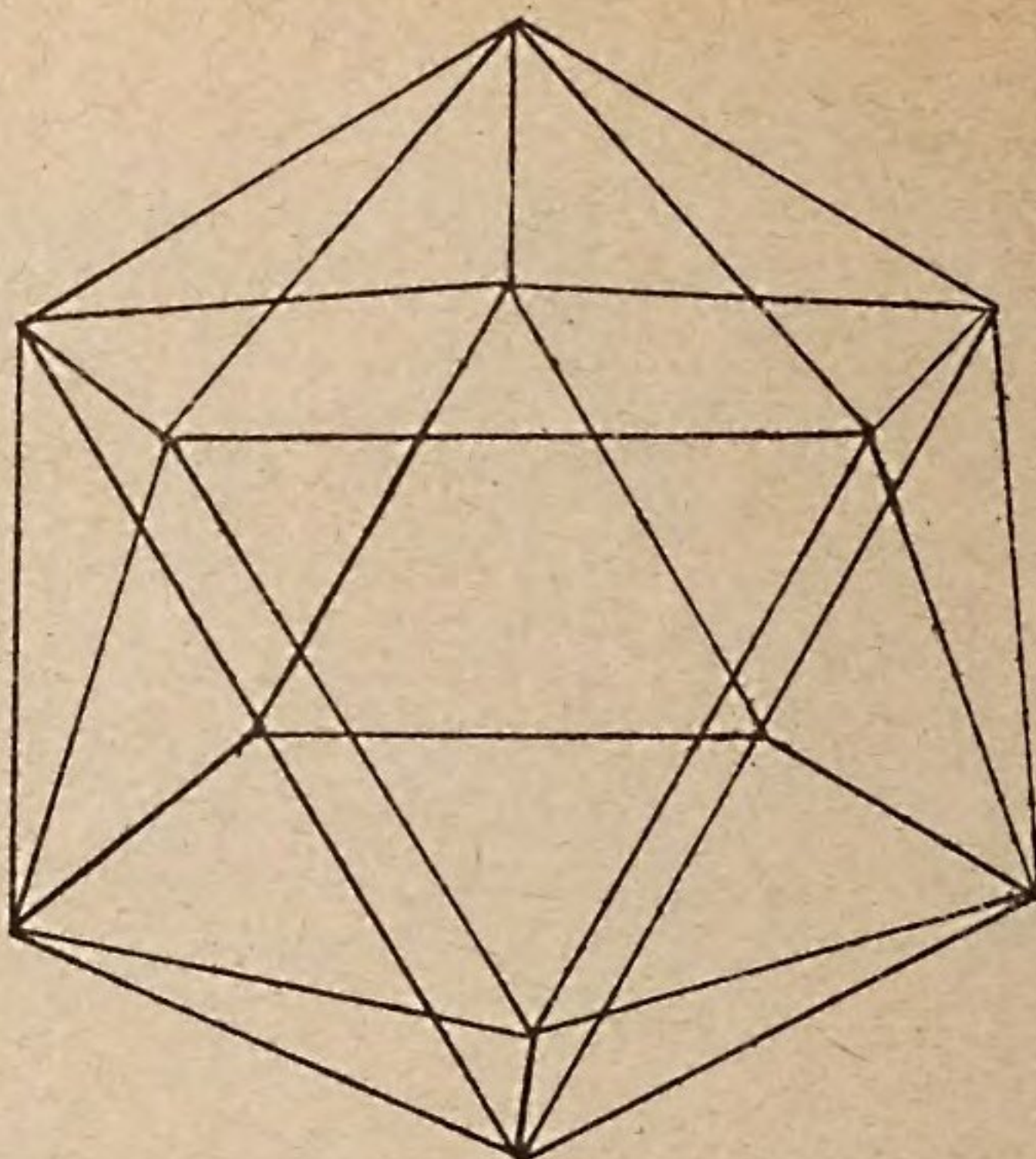
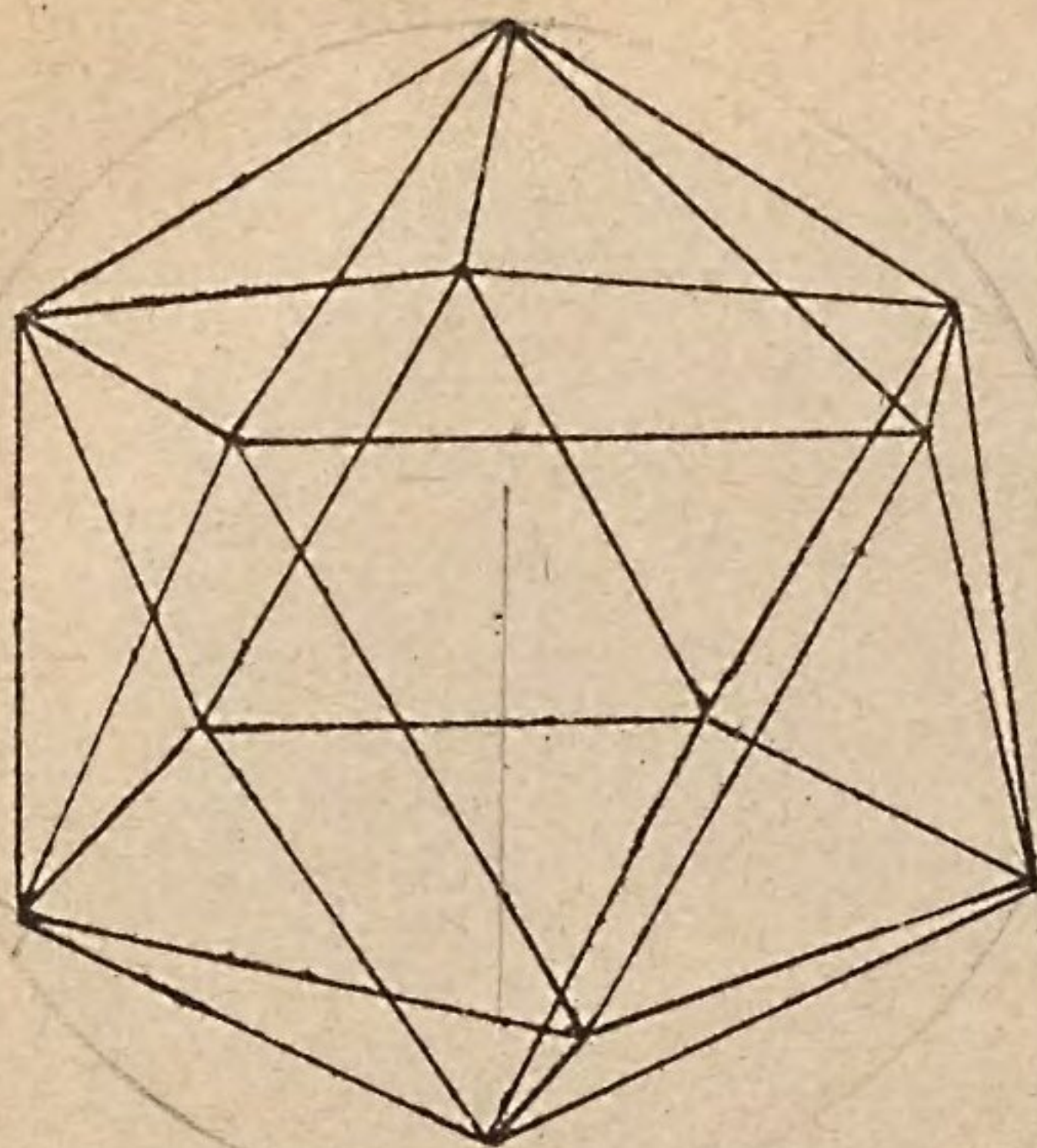
Bemerkung. Die Betrachtung dieser Bilder erfordert kein Stereoskop. Es genügt, die beiden Bilder eines Körpers, in 20 cm. Entfernung vom Auge, so zu betrachten, dass die senkrecht dazwischen gehaltene Hand jedem Auge nur eins der beiden Bilder zu sehen gestattet. Es gelingt dann leicht, die beiden Bilder zu einem einzigen zu vereinigen.

Taf. 1.

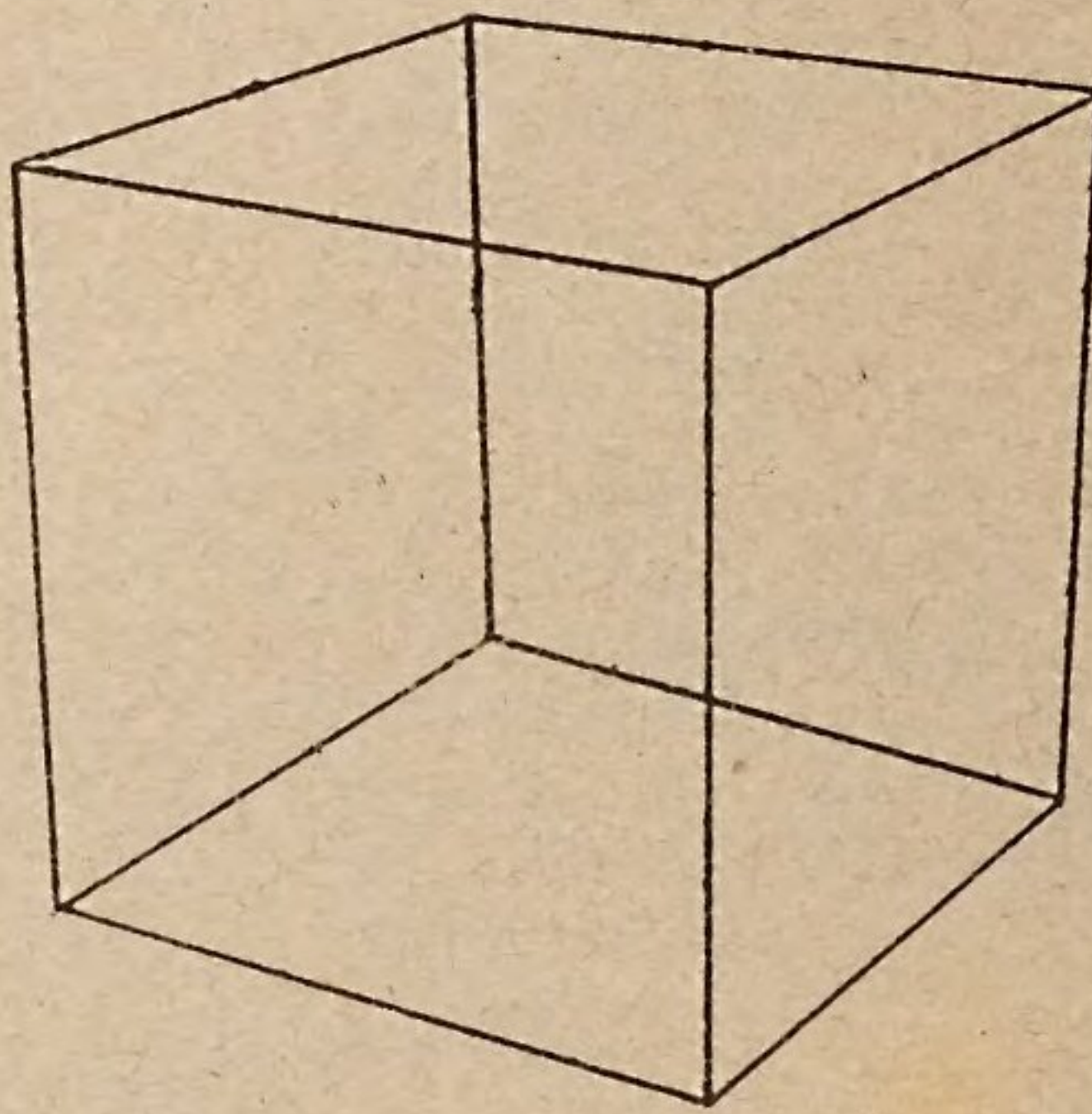
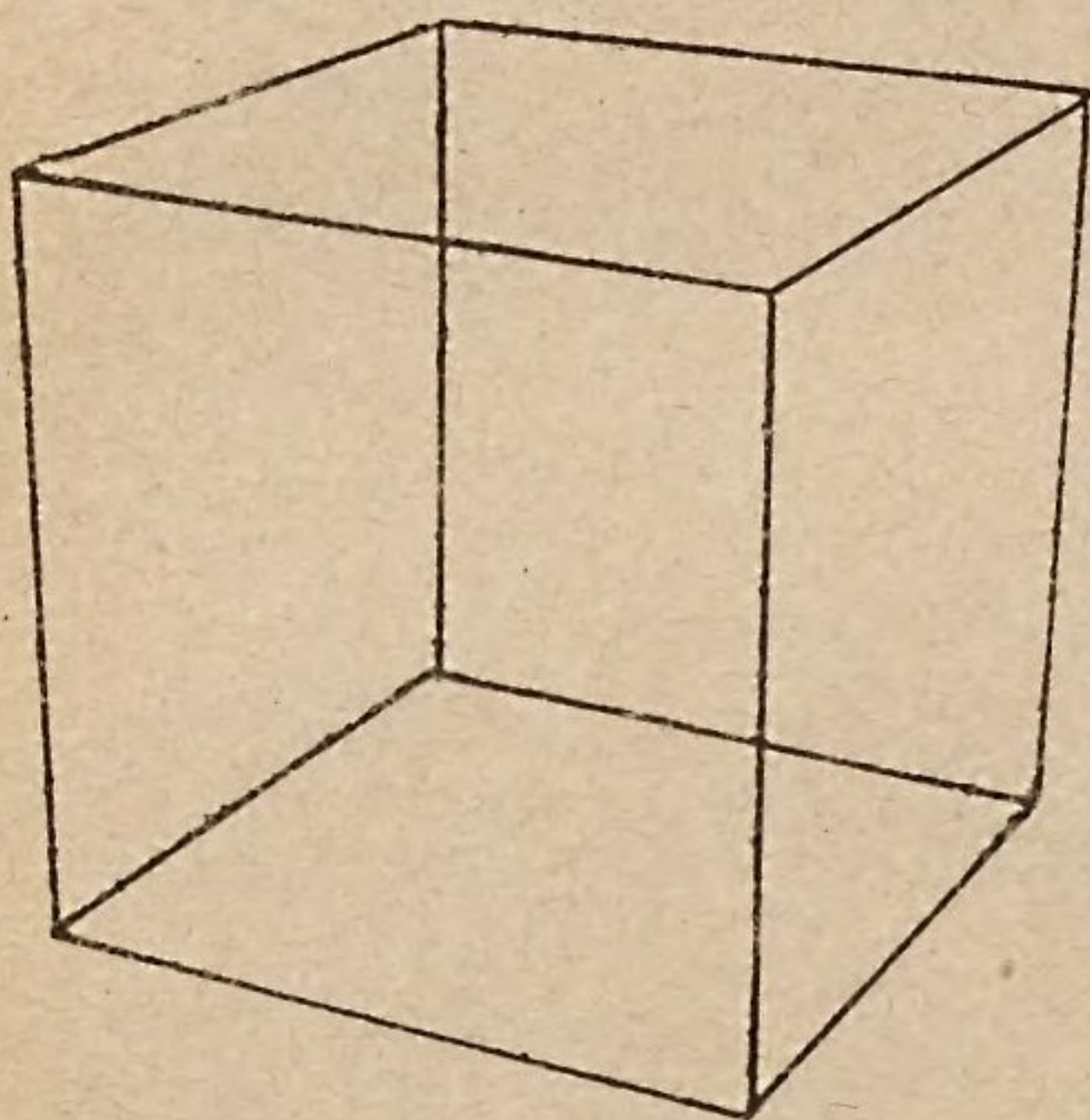




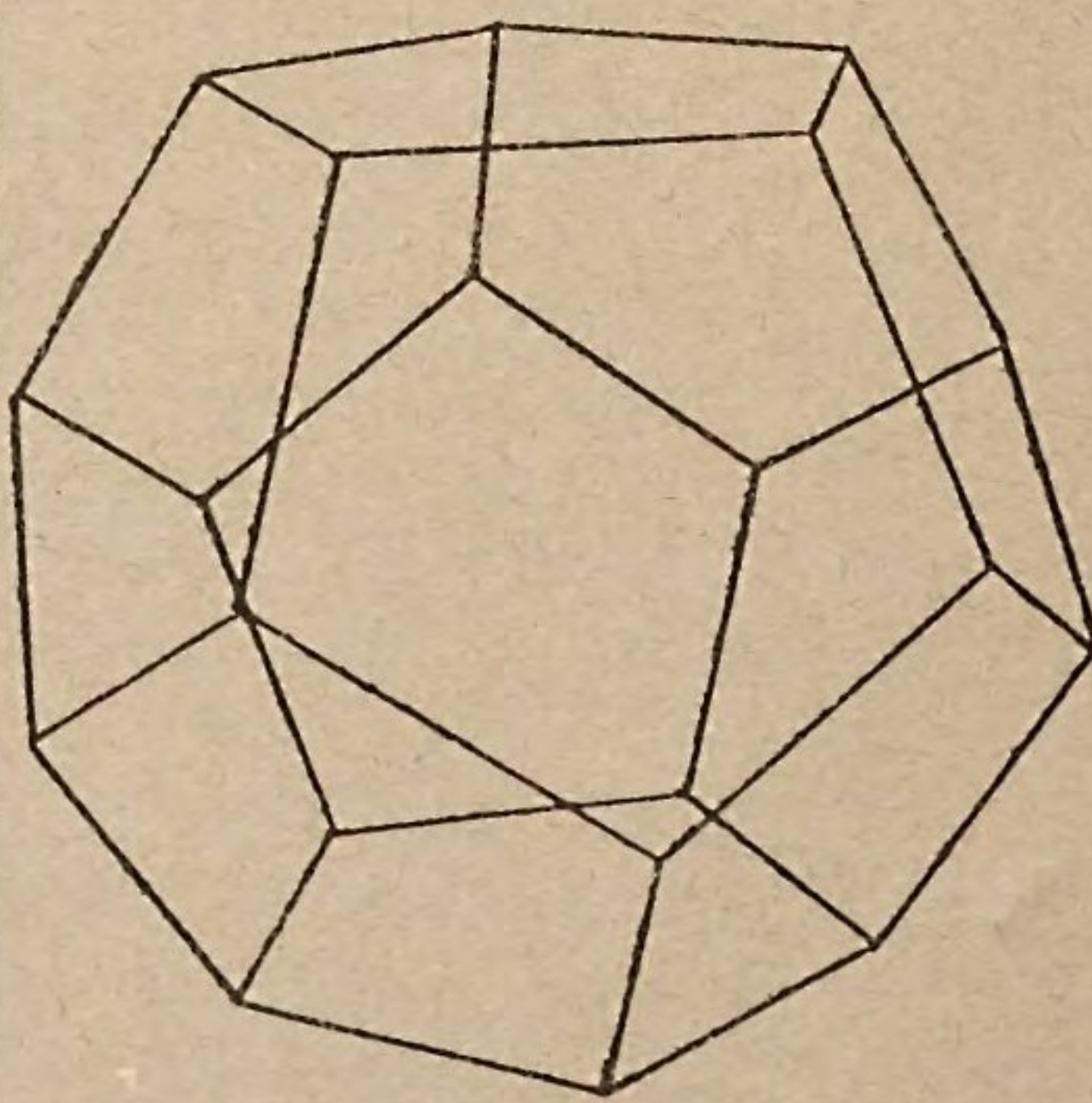
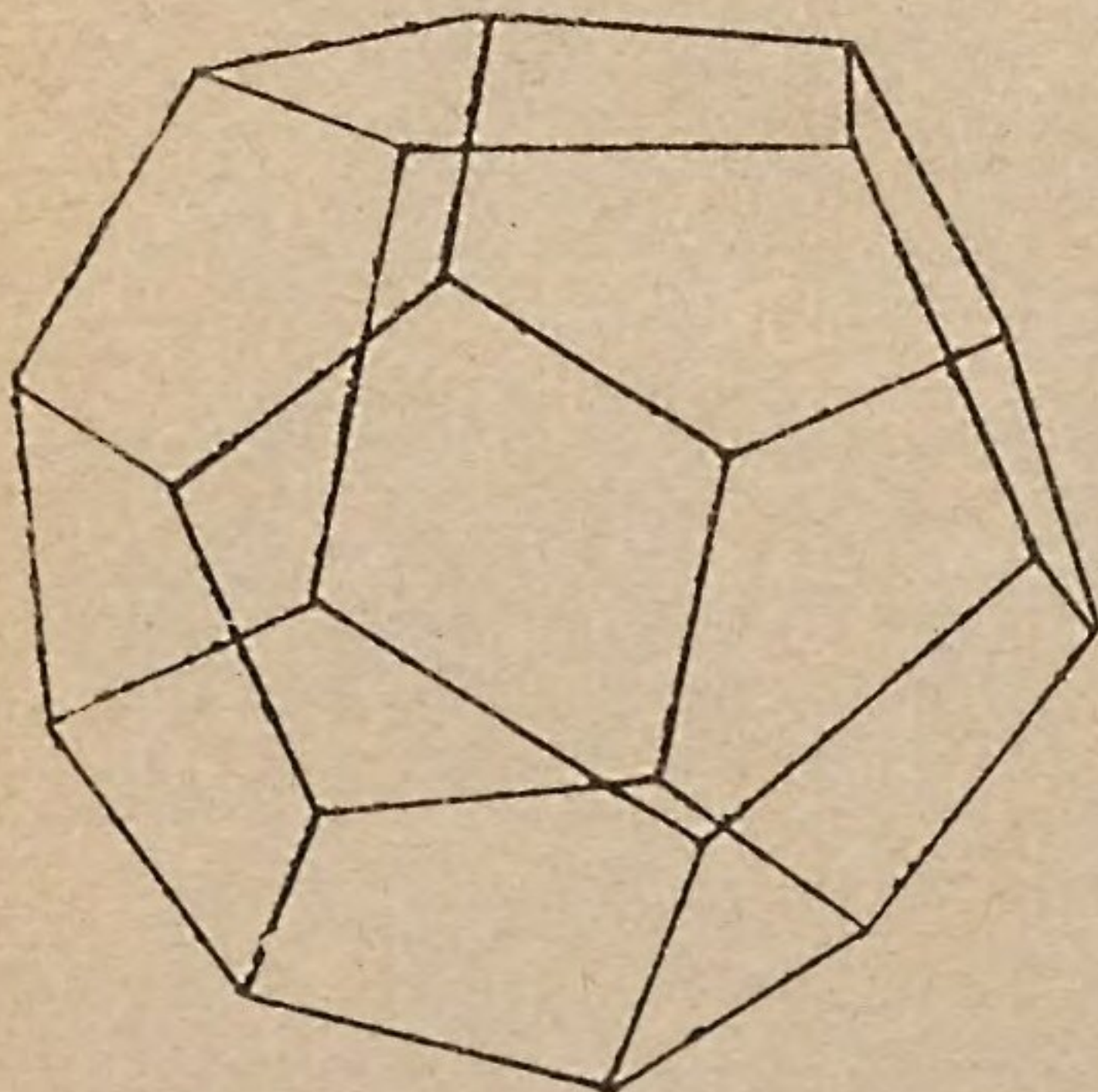
3.



4.



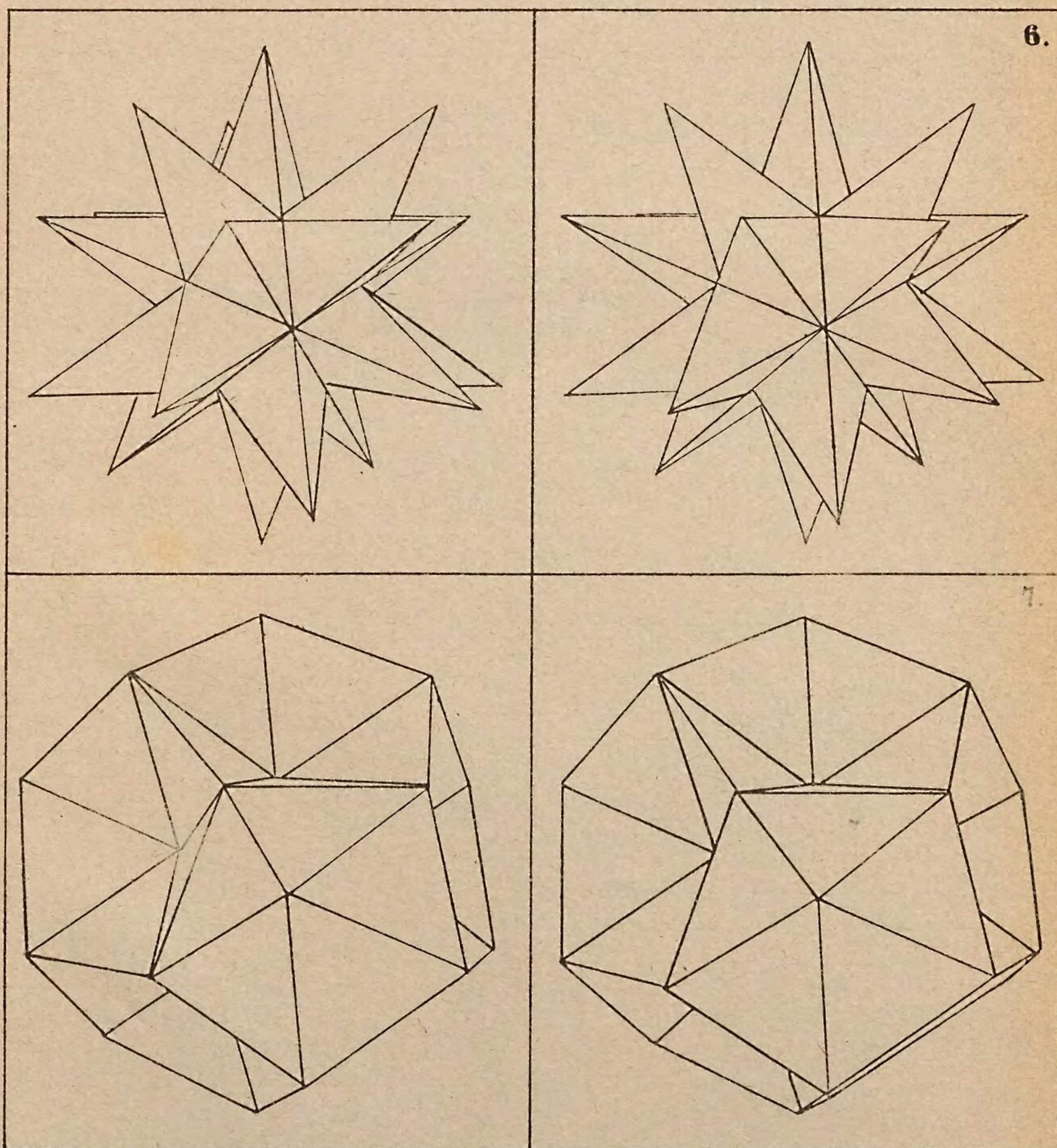
5.



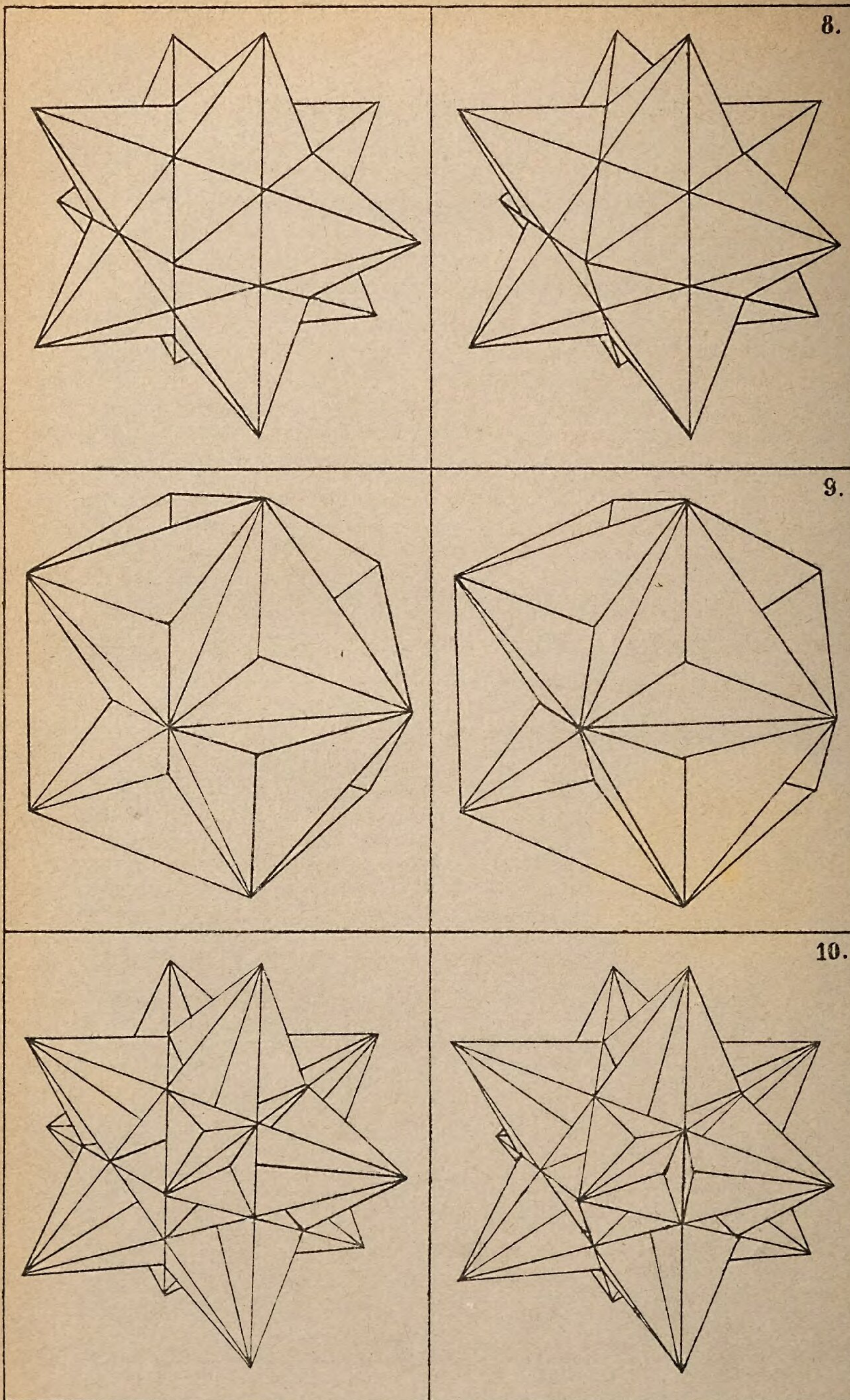


**Stereoskopische Bilder**  
der  
**regelmässigen Stern-Polyeder.**  
(Nach Dr. Th. Hugel.)

Taf. 3.









tigkeit wirklich berufen sind: solche, die über eine grosse Erfahrung verfügen, und solche, die durch selbständige Originalarbeiten auf irgend einem Gebiete der von ihnen gelehrten Wissenschaft ihr Bestreben und ihre Befähigung, selb thatkräftig zu fördern, dargethan haben. Hier nun sind diese beiden Bedingungen erfüllt, die eine derselben sogar in reichstem Maasse. Denn ebenso wie Herrn Schlegel's Arbeiten über pädagogische Dinge, wie wir sie häufig in diesen Blättern lasen, von seinem sicheren und geprüften Urtheil Zeugnis ablegen, ebenso kennt ihn die Fachwelt als unermüdlichen mathematischen Schriftsteller, insonderheit als energischen Kämpfer für allgemeinere Anerkennung und Verbreitung der Grassmann'schen „Ausdehnungslehre“. Wenn ein solcher Mann die Feder ergreift, um ein Compendium zu verfassen, so darf er unserer Aufmerksamkeit und Teilnahme von vornherein sich versichert halten, umsomehr als das Publikum hoffen darf, den Einfluss, welcher Grassmann'schen Ideen auf die Gestaltung des elementaren Unterrichts etwa einzuräumen wäre, aus diesem Werke kennen zu lernen. Man wird also an eine solche Arbeit mit ganz anderen Gefühlen und Erwartungen herantreten, als an die grosse Masse der Dutzendbücher, und wir können gleich a priori dem Leser dieser Zeilen die Zusicherung geben, dass unser Referat ihm keine Enttäuschung bereiten wird.“ etc.

Leider kann wegen beschränkten Raumes das eigentliche Referat nicht abgedruckt werden, und wird deshalb gebeten, dasselbe an oben angegebener Quelle nachzulesen.

Zum Schluss sagt Referent noch:

„In wie weit nach all' dem das auch seiner äusseren Gestalt nach sehr empfehlenswerthe Schlegel'sche Lehrbuch auch weitergehenden Ansprüchen der Lehrer an höheren Schulen gerecht wird, erhellt wol ohne besondere Anpreisung von unserer Seite. Solche Leistungen sprechen für sich selbst.“

Indem die unterzeichnete Verlagshandlung oben angezeigtes Werk dem Interesse aller Fachmänner empfiehlt und bei beabsichtigten Neueinführungen von mathematischen Lehrbüchern um freundliche Berücksichtigung desselben bittet, ist sie bereit, jeder Zeit Exemplare zur Ansicht mitzuteilen, auch bei Einführung die Anschaffung des Werkes ärmeren Schülern zu erleichtern.

Wolfenbüttel Herbst 1880.

**Die Verlagshandlung von Julius Zwissler.**



# Empfehlenswerte Lehrbücher

aus meinem Verlage.

## Geschichte der deutschen Litteratur

mit  
besonderer Berücksichtigung der  
modernen Kulturbestrebungen

im Umriss bearbeitet

von

**Dr. H. Menge,**

Oberlehrer am Gymnasium zu Sangerhausen.

28 Bogen gr. 80.

**Billige Ausgabe.**

Preis eleg. gebdn. Mk. 3,—

Es dürfte nicht leicht eine bessere Uebersicht über die deutsche Litteratur gefunden werden, wie dieses Werk des bekannten Pädagogen. Neben seiner besonders guten Verwertung beim Privatstudium dürfte es sich besonders zur Einführung oder Empfehlung an Gymnasien, Real-schulen und Seminarien eignen. Auch als Prämie wird das Buch jedem Empfänger Freude bereiten.

## **Repetitorium** der griechischen Syntax

für die

obersten Gymnasialklassen  
und namentlich zum Selbststudium

bearbeitet von

**Dr. H. Menge.**

Preis Mk. 3,60.

## **Repetitorium** der lateinischen Grammatik u. Stilistik

für die oberste Gymnasialstufe  
und namentlich zum Selbststudium

bearbeitet von

**Dr. H. Menge.**

Dritte Auflage.

Preis Mk. 4,50.

## Kurzgefasste lateinische Synonymik

für die obersten Gymnasialklassen

bearbeitet von

**Dr. H. Menge.**

Zweite bedeutend vermehrte Auflage.

13 Bogen gr. 80 Preis Mk. 2,25.

Die Lehrbücher von Menge erfreuen sich eines guten Rufs und sind auf vielen Gymnasien Deutschlands und des Auslandes zur Anschaffung empfohlen und im Gebrauch.

## Kurzgefasste französ. Synonymik für Schüler bearbeitet

von

**Dr. Friedrich Koldewey,**

Oberlehrer am Gymnasium in Wolfenbüttel.

5 Bgn. 80 steif brosch. Preis Mk. 1,—

Diese Synonymik ist sofort nach ihrem Erscheinen an verschiedenen Lehranstalten wie Zwickau, Hannover, Cöln, Rostock, Stuttgart, Eisleben u. a. O. eingeführt.





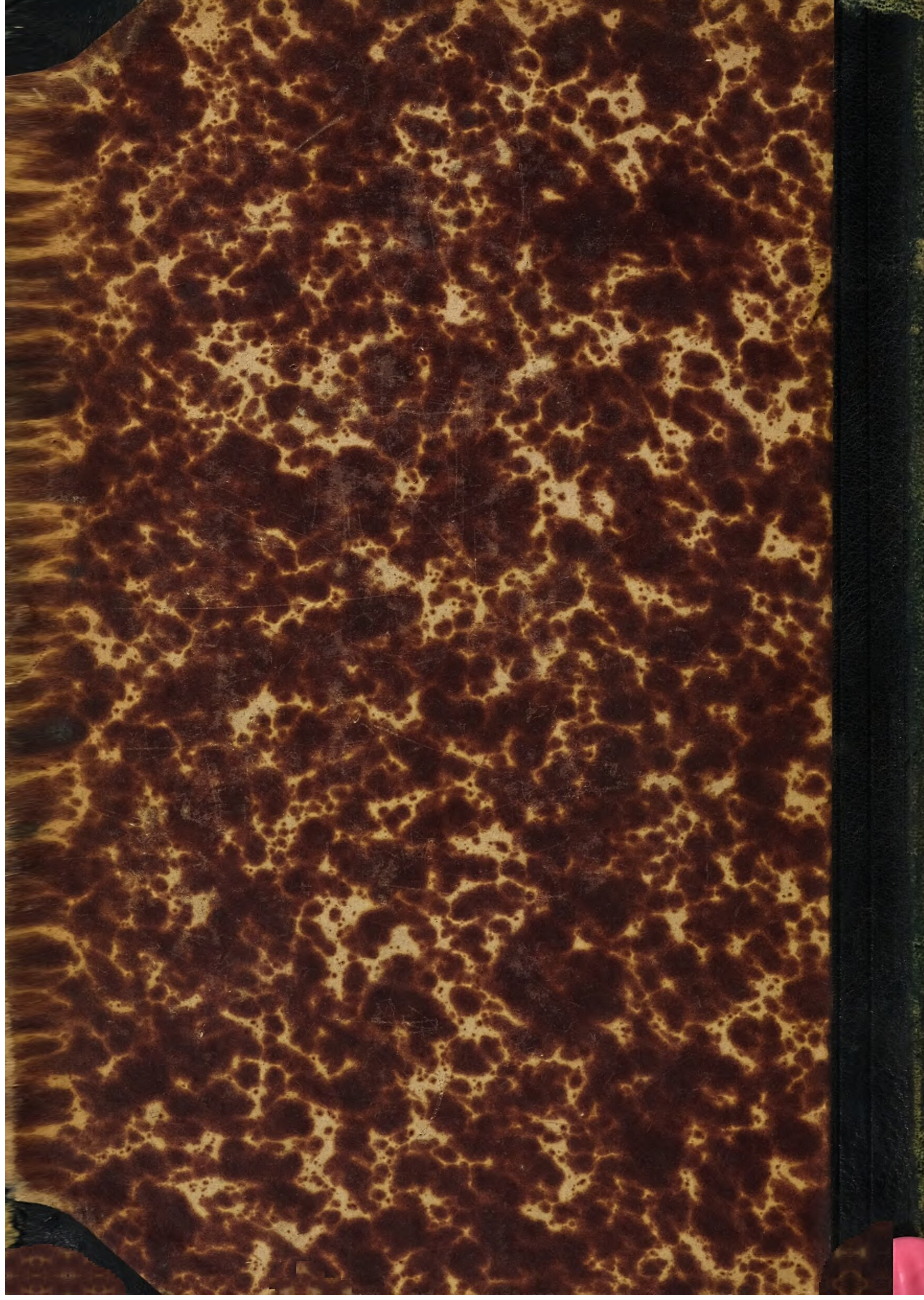








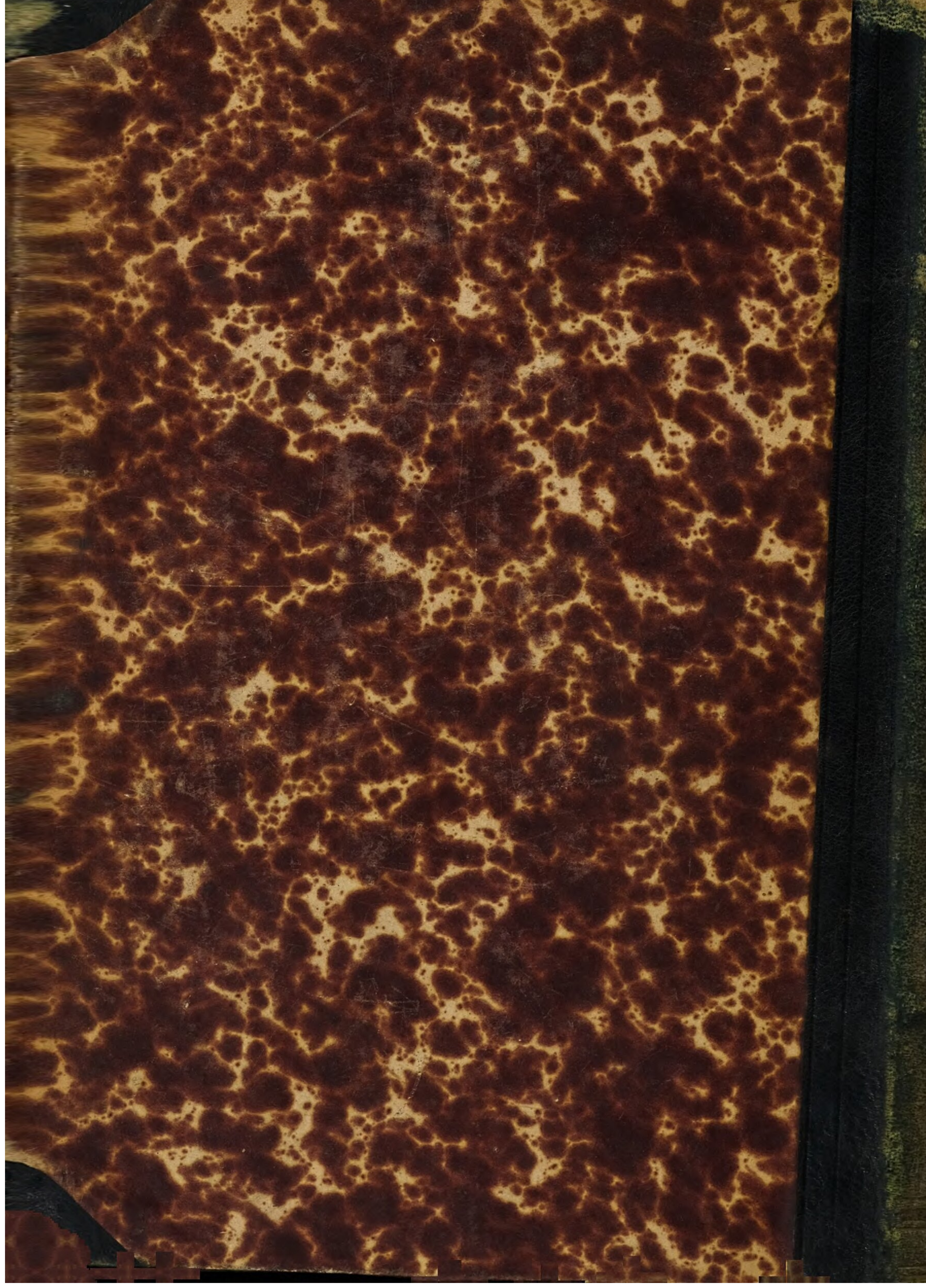














Schlegel, Victor,

Lehrbuch der elementaren Mathematik

Bd.: 4

1880

Math.u. 176 m-4

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11652302-3